Verständnisteil

1. Aufgabe [8 Punkte]

(a) Laut Alg. (x_1, x_4 Nichtkopfvariablen) erhält man die Basisvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Alternativ kann man auch den Kern berechnen und Basisvektoren ablesen.

(b) Der gegebene ist der Standardbasisvektor $\vec{e}_4 \in \mathbb{R}^5$ und ist eine Lösung des LGS, weil $\vec{b}$ gleich der 4. Spalte von A ist.

Alternativ rechnet man $A\vec{e}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ nach.

(c) $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\left(= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} = ... \right)$$

Keine Punkte gibt es auf Rechnungen wie z.B.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = s,\ x_4 = t,\ x_2 = 2 - 2t,\ x_3 = 3 - 3t,\ x_5 = 0$$

2. Aufgabe [12 Punkte]

(a) (a) Da $det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \neq 1$ gilt, ist $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T_1$, also ist T_1 kein Teilraum. (andere Begründungen möglich)

(b) Da z. B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in T_2$, aber $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin T_2$, ist T_2 kein Teilraum.

(c) T_3 ist ein Teilraum, da

i. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_3 \Rightarrow T_3 \neq \emptyset$

ii. $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in T_3 \Rightarrow a_1 + b_1 = c_1 + d_1, a_2 + b_2 = c_2 + d_2$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = c_1 + c_2 + d_1 + d_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in T_3$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in T_3$

iii. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T_3, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b=c+d, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a + \lambda b = \lambda c + \lambda d$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \in T_3 \Rightarrow \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T_3$

(b) Da $x^2 - x = 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x$ gilt, ist das Erzeugendensystem $\{x^2, x^2 - x, x\}$ von T **linear abhängig** .
Weil $x^2 - x = 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x$ gilt, ist (z. B.) auch $\{x^2, x\}$ ein **Erzeugendensystem** von T. Wegen $\lambda x^2 + \mu x = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$ sind die Vektoren x^2, x **linear unabhängig**, also bilden die zwei Polynome x und x^2 eine Basis von T.
Folglich ist $dim(T) = 2$.
(Die fettgedruckten Wörter müssen auftauchen!)

3. Aufgabe [8 Punkte]

(a) $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = L\left(2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
Also ist die gesuchte darstellende Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe [12 Punkte]

(a) Da z.B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, also $dim(Kern(A)) > 0$ ist, ist die Abbildung nicht injektiv.
Aus $dim(\mathbb{R}^2) = dim(Kern(A)) + dim(Bild(A))$ (Dimensionsformel) folgt
$dim(Bild(A)) = 2 - dim(Kern(A)) < 2$, also ist $Bild(A) \neq \mathbb{R}^2$.
Deshalb ist die Abbildung nicht surjektiv.
Alternativ kann man auch feststellen, dass $Bild(A) = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2$ ist.

(b) $L = V_{\lambda=2} = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

(c) Wegen $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist
$\vec{y}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{0t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 1 \\ e^{2t} - 1 \end{bmatrix}$.

(d) Die Matrix A hat als 2×2 - Matrix höchstens zwei Eigenwerte. Somit sind schon alle Eigenwerte gegeben (0 und 2). Da die Eigenwerte von A paarweise verschieden sind, ist A diagonalisierbar.
Die entsprechenden Diagonalmatrizen sind $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) Da $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ nicht bijektiv ist (vgl. (a)), ist A nicht invertierbar.
(Oder $det(A) = det(SDS^{-1}) = det(S)det(D)det(S^{-1}) = det(D) = 2 \cdot 0 = 0$)

(f) Da $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \notin span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = Bild(A)$, ist das LGS nicht lösbar.