Lösungen Rechenteil Oktoberklausur SS 06

Anmerkung: Punkte werden von den Studenten verdient, nicht von den Korrekteuren gegeben.

Aufgabe 1

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ \alpha \\ 5 \end{bmatrix}$. Die Punkte gibts auch für die (richtige) erweiterte Koeffizientenmatrix) .

(b) $$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 6 & 5 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit das System lösbar ist, muß $Rang(A) = Rang(A|\vec{b})$ sein,

also $\alpha = 1$ sein.

Lösungsmenge für diesen Fall $\alpha = 1$:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Die Basis lesen wir oben ab: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) Die Lösungsmenge des homogenen Systems ist gerade der Kern von A:

$$\mathcal{L} = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) Den Rang liest man an der ZSF ab: $Rang(A) = 2$.

Aufgabe 2

(a) A ist eine (untere) Dreiecksmatrix, d.h. die Eigenwerte können auf der Diagonalen abgelesen werden: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

(b) Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ ist die Lösungsmenge von $(A - I)\vec{x} = 0$ bzw. der Kern von $(A - I)$.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Eigenraum zu $\lambda_2 = -1$ ist die Lösungsmenge von $(A + I)\vec{x} = 0$ bzw. der Kern von $(A + I)$.

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_{-1} = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Die Matrix ist diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmt:

Eigenwert $\lambda_1 = 1$: algebraische VF=2, geometrische VF=2.

Eigenwert $\lambda_2 = -1$: algebraische VF=1, geometrische VF=1.

Daraus folgt: A ist diagonalisierbar.

Diagonalmatrix hat die Eigenwerte auf der Diagonalen:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) $\vec{w}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\vec{w}_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) Die Matrix Q wird aus den Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ gebildet: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Also erhält man:

$$R = \begin{bmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle & \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \\ \langle \vec{v}_1, \vec{w}_2 \rangle & \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle \end{bmatrix} \left[\text{oder} R = Q^T A\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) = 1 \neq 0$

Die Vektoren sind also in diesem Skalarprodukt nicht orthogonal.

Aufgabe 4

Basisvektoren in L einsetzen:

$$L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koordinatenvektoren dieser Bildvektoren berechnen:

$$K_B\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}, K_B\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}, K_B\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$K_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_B = \begin{bmatrix} -7 & -5 & 0 \\ 13 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$