Verständnisteil

Aufgabe 1 (9 P)
a) Lösungsmöglichkeiten ergeben sich aus $p_1 = -p_5$ und $p_2 + p_3 = p_4$. Hingeschrieben werden muss z.B.:
p_1, p_2, p_5 sind lin. abh., weil $1p_1 + 0p_2 + p_5 = x^2 - x + 0 - x^2 + x = 0$ und die Koeffizienten sind $1, 0, 1$ also nicht alle $= 0$. Alternativ:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_5 \\ \Leftrightarrow 0 &= \lambda_1(x^2 - x) + \lambda_2(2x+2) + \lambda_3(-x^2 + x) \\ \Leftrightarrow 0x^2 + 0x + 0 &= x^2(\lambda_1 - \lambda_3) + x(-\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) + 2\lambda_2 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& \lambda_1 - \lambda_3 \\ 0 &=& -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 0 &=& 2\lambda_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} III: \lambda_2 &=& 0 \\ I, II: \lambda_1 &=& \lambda_3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Also nicht immer alle $\lambda_i = 0$ (z.B.: $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_3 = 1$) $\Rightarrow p_1, p_2, p_5$ lin. abh.
b) **Punkte auf die (richtige) Antwort gibt es nur, wenn mind. der Ansatz einer Begründung da steht.**
(i) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind l.u., weil es EVen zu versch. EWen (der selben Matrix) sind.
(ii) $\vec{w}$ und $A\vec{w}$ sind lin. abh., weil $\vec{w}$ ein Vielfaches von $A\vec{w} = 2\vec{w}$ ist: $-2\vec{w} + Aw = 0$ mit Koeffizienten $-2, 1 (\neq 0)$ in der Linearkombination.

Aufgabe 2 (10 P)
Erste Möglichkeit: Korrekte Matrix angeben und begründen. **Punkte auf die (richtige) Matrix gibt es nur, wenn mind. der Ansatz einer Begründung da steht.**

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{weil } A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ weil } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \\ B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \text{ weil } \det B = 2\frac{1}{2} = 1 \text{ und } \left|\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{2^2} = 2 \neq 1 \\ & \text{bzw } BB^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \neq E \text{ Orth. muss nachgewiesen werden!} \\ C &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ weil } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ weil } \det D = 1 \neq 0, D^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{muss da stehen!}} = -D \end{aligned}$$

Achtung: Antisymmetrisch $\neq$ nicht symmetrisch!

Zweite Möglichkeit: passende Matrix konstruieren.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{Bild } (A) = \text{ span } \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\} \\ & \text{wähle } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (oder auch beide } = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \\ \Rightarrow A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ oder } \ldots \\ B &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{mit } B^T B = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\ & \text{und } \det B = ad - bc = 1 \end{aligned}$$

Es reicht also die Ungleichung $a^2 + b^2 \neq 1$ und die Gleichung $ad - bc = 1$ gleichzeitig zu erfüllen, z.B. durch $a = 2, b = c = d = 1$. Also $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Andere korrekte Ansätze für "nicht orthogonal": $BB^T \neq E$, $\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \rangle = 1 \neq 0$ oder auch $||\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}|| = 2 \neq 1$ (Spalten von B bilden keine ONB).

$$C = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a + 2d &=& 0 \\ b + 2e &=& 0 \\ c + 2f &=& 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -2d \\ b &=& -2e \\ c &=& -2f \end{array} \right\}$$

mit freien Variablen d, e, f. Wähle $d = 1, e = 2, f = 0$, also $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$D^T = -D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -a \\ b &=& -c \\ c &=& -b \\ d &=& -d \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& -c \\ d &=& 0 \end{array} \right\}$$

(auch OK: antisymmetrisch $\Rightarrow$ alle Diagonalelemente $= 0$)

mit freier Variable c. Wähle z.B. $c = 1$ und prüfe $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0$. Also $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (11 P)
a) Gegenbeispiel zu $L(\vec{x}) + L(\vec{y}) = L(\vec{x}+\vec{y})$ mit $\vec{x} = (1,0,0,0)^T$ und $\vec{y} = (0,0,0,1)^T$.

$$L(\vec{x}) = \det\left(\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}\right) = 0\,,\; L(\vec{y}) = \det\left(\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}\right) = 0\,,\; L(\vec{x}+\vec{y}) = \det\left(\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\right) = 1$$

Also ist L_1 nicht linear. Alternative: $L(\vec{x}), L(\vec{y}), L(\vec{x})+L(\vec{y}), L(\vec{x}+\vec{y})$ ausrechnen und vergleichen.

b) 1. Möglichkeit $L_2(\vec{x}) = \det\left(\begin{pmatrix}x_1\,1\\x_2\,2\end{pmatrix}\right) = 2x_1 - x_2 = [2\,1]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

Also ist L_2 eine Matrixabbildung und darum linear.
2. Möglichkeit

$$\begin{aligned}
L(\vec{x}) &= \det\left(\begin{pmatrix}x_1\,1\\x_2\,2\end{pmatrix}\right) = 2x_1 - x_2\,,\; L(\vec{y}) = 2y_1 - y_2\\
L(\vec{x}+\vec{y}) &= \det\left(\begin{pmatrix}x_1+y_1\,1\\x_2+y_2\,2\end{pmatrix}\right) = 2(x_1+y_1) - (x_2+y_2)\\
L(\vec{x})+L(\vec{y}) &= 2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2 = 2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2 = 2(x_1+y_1) - (x_2+y_2)\\
&= L(\vec{x}+\vec{y})\\
L(\lambda\vec{x}) &= \det\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\,1\\\lambda x_2\,2\end{pmatrix}\right) = 2\lambda x_1 - \lambda x_2\\
&= \lambda(2x_1 - x_2) = \lambda L(\vec{x})
\end{aligned}$$

Also wurden die Linearitätseigenschaften erfolgreich nachgeprüft und L_2 ist linear.
c) $L_3(x) = \det\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\,x_1\\x_2\,x_2\end{smallmatrix}\right)\right) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$ und die Nullabbildung ist linear:

$$0 = L_3(x)\,,\; 0 = L_3(y)\,,\; 0 = L(x+y)\,,\; 0 = L(\lambda(x))$$
$$\Rightarrow \{L(x+y) = 0 = L(x) + L(y)\,,\; \lambda L(x) = \lambda 0 = 0 = L(\lambda(x))\}$$

Aufgabe 4 (10P)
a) l_2 und w_1 sind orthogonal, weil ihr Skalarprodukt $= 0$ ist.

$$\begin{aligned}
\langle l_2\,,\,w_1\rangle &= \langle v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\,,\,w_1\rangle\\
&= \langle v_2\,,\,w_1\rangle + \langle -\langle v_2\,,\,w_1\rangle w_1\,,\,w_1\rangle\\
&= \langle v_2\,,\,w_1\rangle - \langle v_2\,,\,w_1\rangle \underbrace{\langle w_1\,,\,w_1\rangle}_{=||w||^2=1}\\
&= \langle v_2\,,\,w_1\rangle - \langle v_2\,,\,w_1\rangle = 0
\end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned}
\langle w_1\,,\,l_2\rangle &= \langle w_1\,,\,v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\rangle\\
&= \langle w_1\,,\,v_2\rangle + \langle w_1\,,\,-\langle v_2, w_1\rangle w_1\rangle\\
&= \langle w_1\,,\,v_2\rangle - \langle w_1\,,\,\langle v_2, w_1\rangle w_1\rangle\\
&= \langle w_1\,,\,v_2\rangle - \langle v_2\,,\,w_1\rangle \underbrace{\langle w_1\,,\,w_1\rangle}_{=||w||^2=1}\\
&= \langle w_1\,,\,v_2\rangle - \langle w_1\,,\,v_2\rangle = 0
\end{aligned}$$

Der Ansatz, dass w_1 und w_2 orthogonal sind und darum auch w_1 und l_2 gibt keine Punkte. Ebenso andere rein verbale Erklärungen, die mit dem Gram-Schmidt-Verfahren argumentieren.

$$b)\;\; \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\rangle_b = 1(-2) + 3\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 3 = -2 + 6 = 4 \neq 0$$

also sind die Vektoren nicht orthogonal bzgl. dieses Skalarproduktes.

$$c)\;\; \left|\left| \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\rangle_b} = \sqrt{4 + 3\cdot 1 + 9} = \sqrt{16} = 4$$

Achtung: In b) und c) gibt es keine Punkte, wenn das Standardskalarprodukt verwendet wurde.