Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 07

C. Mehl/K. Roegner/R. Seiler 25.07.2007

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe

14 Punkte

Von der Matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ sind die **vier linear unabhängigen Eigenvektoren** in $\mathbb{C}^4$ bekannt:

$$\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; \vec{v}_4 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dabei sind $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_4$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und $\vec{v}_3$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

(a) Der Eigenvektor $\vec{v}_1$ gehört zu dem Eigenwert λ_1. Bestimmen Sie λ_1.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^4$ ist.

(c) Warum ist A diagonalisierbar?

(d) Es sei $S := [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; \vec{v}_3 \; \vec{v}_4]$ mit der Inversen $S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Geben Sie die Diagonalmatrix D an, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

(e) Bestimmen Sie $\det A, \det(A^2)$ sowie $\det(A^T)$.

(f) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t)$, $\vec{y}(0) = \vec{v}_3$.

2. Aufgabe

9 Punkte

Wir betrachten eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{2,3} \to \mathbb{R}^5$.

Von dieser linearen Abbildung kennen wir eine Basis des Kerns: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Ist $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \operatorname{Kern} L$?

(b) Bestimmen Sie dim Kern L sowie dim Bild L.

(c) Ist L injektiv / surjektiv / bijektiv ?

3. Aufgabe

11 Punkte

Prüfen Sie, ob es sich bei den gegebenen Mengen M_1, M_2, M_3 um Teilräume des $\mathbb{R}^2$ handelt.

$$M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{bmatrix} x_1 & -2 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x^4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M_3 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - 2 = 4x_2 \right\}$$

4. Aufgabe

6 Punkte

Finden Sie für jede der folgenden Aussagen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, so dass die Aussage gilt. Hierbei bezeichnet $\tilde{A}$ die NZSF von A. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\det A \neq \det \tilde{A}$

(b) Das charakteristische Polynom von A ist ungleich dem charakteristischen Polynom von $\tilde{A}$.

(c) $\operatorname{Bild} A \neq \operatorname{Bild} \tilde{A}$