Verständnisteil

1. Aufgabe [14 Punkte]

(a) $A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\vec{v}_1$. Also ist $\lambda_1 = 3$.

(b) Wegen $dim(\mathbb{C}^4) = 4$ besteht jede Basis aus vier Elementen. Da die Dimension also bekannt ist, reicht es zu zeigen, dass die gegebenen vier Vektoren linear unabhängig sind. Dies ist laut Aufgabenstellung schon erfüllt. Also ist M eine Basis des $\mathbb{C}^4$.

Alternativ: lin. unabh. Erz.system; eindeutige Linearkombination

(c) Weil M laut Teil b) eine **Basis** des $\mathbb{C}^4$ ist und **aus Eigenvektoren** besteht, ist A diagonalisierbar.

Alternativ: algebraische und geometrische Vielfachheiten aller Eigenwerte mit Begründung bestimmen und auf Gleichheit überprüfen

(d) Die Diagonalelemente der Matrix D bestehen aus den Eigenwerten von A in der Reihenfolge der Eigenvektoren in der Matrix S: $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(e)
1. Laplace liefert $det(A) = 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$.

   Alternativ: $det(A) = det(SDS^{-1}) \overset{\text{Theorem}}{=} det(D) = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
2. $det(A^2) = det(A \cdot A) = det(A) \cdot det(A) = 36$.
3. $det(A^T) = det(A) = 6$

(f) Da $\vec{y}(0)$ ein Eigenvektor (zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$) ist, gilt für die Lösung des AWPs $\vec{y}(t) = e^{\lambda_3 t}\vec{y}(0) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$.

Alternativ: $\vec{y}(t) = Se^{tD}S^{-1}\vec{y}(0)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{1t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{t} & e^{2t} & 2e^{t} \\ -e^{3t} & 2e^{t} & -e^{2t} & -2e^{t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & 2e^{t} \\ 0 & 0 & -e^{2t} & -e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe [11 Punkte]

(a) $0 = \begin{vmatrix} x_1 & -2 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2$. Damit ist $M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Überprüfe für M_1 die drei Teilraumkriterien.

1. Da $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in M_1$, ist $M_1 \neq \emptyset$.
2. Seien $\begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} \in M_1$.
   Dann gilt $\begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x - 2y \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x+y) \\ x + y \end{bmatrix} \in M_1$.
3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} \in M_1$.
   Dann gilt $\lambda \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot (-2x) \\ \lambda x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(\lambda x) \\ \lambda x \end{bmatrix} \in M_1$.

Da alle drei Teilraumeigenschaften erfüllt sind, ist M_1 ein Teilraum.

Alternativ:

1. Für $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gilt $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{0} \in M_1 \Rightarrow M_1 \neq \emptyset$
2. Seien $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in M_1$, d.h. $0 = \begin{vmatrix} x_1 & -2 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + 2x_2, 0 = \begin{vmatrix} y_1 & -2 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = y_1 + 2y_2$ Dann gilt $\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & -2 \\ x_2 + y_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) = x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 \overset{Vor.}{=} 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in M_1$.
3. Sei $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in M_1, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $\lambda\vec{x}$: $\begin{vmatrix} \lambda x_1 & -2 \\ \lambda x_2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda x_1 + 2\lambda x_2 = \lambda(x_1 + 2x_2) \overset{\vec{x} \in M_1}{=} \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda\vec{x} \in M_1$.

Da alle drei Bedingungen für Teilräume erfüllt sind, ist M_1 ein Teilraum.

Weitere Alternative: Mit obiger Überlegung ist $M_1 = span \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Laut Skript ist eine lineare Hülle von Elementen eines Vektorraums ein Teilraum. (Skript Theorem 5.2.11)

(b) Gegenbeispiel: Betrachte z.B. $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1^4 \end{bmatrix} \in M_2$. Es ist $\lambda\vec{x} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Dies ist kein Element in M_2, da es keine reelle Zahl x mit $x^4 = -1$ gibt. Also ist M_2 nicht abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren, also kein Teilraum.

(c) Da für $\vec{x} = \vec{0}$ nicht $3x_1 - 2 = 4x_2$ gilt, ist $\vec{0} \notin M_3$, also ist M_3 kein Teilraum.

Alternative Begründungen (Angabe eines Gegenbeispiels oder Nachweis, dass eine der Teilraumbedingungen nicht erfüllt ist) möglich.

2. Aufgabe [9 Punkte]

(a) Es gilt $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Kern} L.$

Alternativ:
$Kern(L) = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$. Da $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ lösbar ist ($s = 2, t = 3$), ist $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \operatorname{Kern} L$.

(b) dim Kern L: Dimension des Kerns ist **Anzahl der Elemente in einer Basis** des Kerns, also dim Kern $L = 2$.

dim Bild L: Der Dimensionssatz liefert $dim(\mathbb{R}^{3,2}) = dim(Kern(L)) + dim(Bild(L))$ $\Rightarrow dim(Bild(L)) = 6 - 2 = 4$.

(c)
1. Da nach Teil a) der Kern von L nicht nur aus der Nullmatrix besteht (oder: dim(Kern(L))$\neq 0$), ist L nicht injektiv.
2. Da $dim(Bild(L)) = 4 \neq 5 = dim(\mathbb{R}^5) = dim(W)$, ist L nicht surjektiv.
3. Da L nicht injektiv (oder: nicht surjektiv) ist, ist die Abbildung auch nicht bijektiv.

4. Aufgabe [6 Punkte]

(a) Wähle z.B. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Es ist $det(A) = -1 \neq 1 = det(\tilde{A})$.

(b) Wähle z.B. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Es ist $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$ und $p_{\tilde{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \neq p_A(\lambda)$.

(c) Wähle z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Es ist $Bild(A) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \neq span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = Bild(\tilde{A})$.