Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 07
C. Mehl/K. Roegner/R. Seiler 10.10.2007

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_4 & - & x_1 & - & x_2 & = & -1 \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix an.

(b) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix in die normierte Zeilenstufenform (NZSF).

(c) Welchen Rang hat die erweiterte Koeffizientenmatrix?

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^4$ des LGS.

2. Aufgabe 7 Punkte

Sei $C := \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C in Abhängigkeit des Parameters α.

(b) Für welche α sind die Spalten von C linear abhängig ?

3. Aufgabe 16 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der linearen Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

(c) Geben Sie für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit an.

(d) Bestimmen Sie Matrizen S, S^{-1} und D, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

(e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t),\ \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe 9 Punkte

Die Koordinatenabbildung $K_\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bezüglich einer bestimmten Basis $\mathcal{B} := \{p_1, p_2, p_3\}$ ist gegeben durch:

$$\begin{array}{cccc} K_\mathcal{B} : & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & ax^2 + bx + c & \mapsto & \begin{bmatrix} a - c \\ a + b \\ b + 2c \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $K_\mathcal{B}^{-1}\left(\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix}\right)$ für $\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{B}$.