1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_4 & - & x_1 & - & x_2 & = & -1 \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix an.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

(b) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix in die normierte Zeilenstufenform (NZSF).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{II+I}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{I-II}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c) Welchen Rang hat die erweiterte Koeffizientenmatrix?
Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat den Rang 2, da es 2 Kopfvariablen gibt.

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^4$ des LGS.
Führe Variablen für die Nicht-Kopfvariablen ein:

$$x_2 = s, x_4 = t \in \mathbb{R}$$

Berechnen der Kopfvariablen:

$$x_3 = -t, \quad x_1 = 1 - s + t$$

Lösungsmenge:

$$\mathcal{L} = \{ \begin{bmatrix} 1-s+t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

2. Aufgabe

7 Punkte

Sei $C := \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C in Abhängigkeit des Parameters α.

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\text{Laplace 1. Spalte}}{=} -\det \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Laplace 3. bzw. 1. Spalte}}{=} -2\det \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -2(\alpha - 1) + \alpha \cdot (-1)$$

$$= -2\alpha + 2 - \alpha = 2 - 3\alpha$$

(b) Für welche α sind die Spalten von C linear abhängig ?
Die Spalten von C sind genau dann linear abhängig, wenn $\det C = 0$. Also :

$$2 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow 2 = 3\alpha$$

Also für $\alpha = \frac{2}{3}$.

3. Aufgabe

16 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der linearen Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.
Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
Charakteristisches Polynom:

$$p_A(z) = \det(A - zE_3) = \det \begin{bmatrix} 3-z & 6 & 12 \\ 0 & 6-z & 6 \\ 0 & -3 & -3-z \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Laplace 1. Spalte}}{=} (3-t) \det \begin{bmatrix} 6-z & 6 \\ -3 & -3-z \end{bmatrix} = (3-z)\big((6-z)(-3-z)+18\big)$$

$$= (3-z)(-18+3z-6z+z^2+18) = (3-z)(z^2-3z) = -z(3-z)^2$$

Die Eigenwerte von A sind also 0 und 3.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.
Eigenraum zum Eigenwert 0:

$$V_0 = \text{Kern} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \overset{III+\frac{1}{2}II}{=} \text{Kern} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \{ \begin{bmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\}$$

$$= \text{span}\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

Eigenraum zum Eigenwert 3:

$$V_3 = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \overset{II-\frac{1}{2}I, III+\frac{1}{2}I, I:6}{=} \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \{ \begin{bmatrix} s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{C}\}$$

$$= \text{span}\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

(c) Geben Sie für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit an.
Der Eigenwert 0 hat algebraische und geometrische Vielfachheit 1 und der Eigenwert 3 hat algebraische und geometrische Vielfachheit 2.

(d) Bestimmen Sie Matrizen S, S^{-1} und D, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.
Auf der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte und S hat als Spalten die zugehörigen Eigenvektoren (in der richtigen Reihenfolge!)

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechne S^{-1}:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\stackrel{2III+II}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \stackrel{I+2III, II+III}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\stackrel{III:(-2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Also

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t), \ \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{At}y(0)$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{Dt}S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{e^{0t}=1}{=} \begin{bmatrix} -2 & e^{3t} & 0 \\ -1 & 0 & -2e^{3t} \\ 1 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{3t}-2 & 4e^{3t}-4 \\ 0 & 2e^{3t}-1 & 2e^{3t}-2 \\ 0 & 1-e^{3t} & 2-e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Also

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{3t}-2 & 4e^{3t}-4 \\ 0 & 2e^{3t}-1 & 2e^{3t}-2 \\ 0 & 1-e^{3t} & 2-e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2e^{3t} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bezüglich einer bestimmten Basis $\mathcal{B} := \{p_1, p_2, p_3\}$ ist gegeben durch:

$$K_{\mathcal{B}}: \quad \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3, \qquad ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} a - c \\ a + b \\ b + 2c \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix}\right)$ für $\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Gesucht ist also $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, so dass

$$\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} = K_{\mathcal{B}}(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a - c \\ a + b \\ b + 2c \end{bmatrix}$$

Löse also das lineare Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & e \\ 1 & 1 & 0 & f \\ 0 & 1 & 2 & g \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & e \\ 0 & 1 & 1 & f-e \\ 0 & 1 & 2 & g \end{array}\right] \xrightarrow{III-II} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & e \\ 0 & 1 & 1 & f-e \\ 0 & 0 & 1 & g-f+e \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I+III, II-III} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & g-f+2e \\ 0 & 1 & 0 & -g+2f-2e \\ 0 & 0 & 1 & g-f+e \end{array}\right]$$

Also

$$K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix}\right) = (2e - f + g)x^2 + (-2e + 2f - g)x + (e - f + g)$$

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{B}$.

Es gilt: $p_i = K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)$, wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

$$p_1 = 2x^2 - 2x + 1, \quad p_2 = -x^2 + 2x - 1, \quad p_3 = x^2 - x + 1$$