Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 07/08

J. Gärtner/M. Huber/R. Nabben/K. Roegner/R. Seiler 20.02.2008

Februar – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5} \text{ und der Vektor } \vec{b} := \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ auf, und bringen Sie diese auf normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von Bild A.

2. Aufgabe 6 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit eines Parameters $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von M durch Laplace-Entwicklung nach der 4. Zeile.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist M invertierbar?

3. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ des $\mathbb{R}^2$.

(a) Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ bzgl. des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^2$ mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren.

(b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]$.

4. Aufgabe 14 Punkte

Gegeben ist die Matrix $L := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$.

(a) Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von L und die zugehörigen Eigenräume.

(c) Diagonalisieren Sie L, d.h. geben Sie Matrizen S und D an, so dass D eine Diagonalmatrix ist und $L = SDS^{-1}$.

(d) Berechnen Sie S^{-1}.

(e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = L\vec{y}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$