1. Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5} \text{ und der Vektor } \vec{b} := \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   (a) **4 Punkte** Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ auf und bringen Sie diese auf normierte Zeilenstufenform.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \overset{II-3I, III-2I}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right]$$

$$\overset{II:9, III:7}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{I+3II, III-II}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   (b) **5 Punkte** Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.
   Nichtkopfvariablen sind frei wählbar $x_2 = s, x_3 = t, x_4 = u \in \mathbb{R}$
   Kopfvariablen: $x_1 = 3 - 2s - u, x_5 = 2$

$$L = \{ \begin{bmatrix} 3 - 2s - u \\ s \\ t \\ u \\ 2 \end{bmatrix} \mid s, t, u \in \mathbb{R}\}$$

   (c) **2 Punkte** Bestimmen Sie eine Basis von Bild A.
   Basis von Bild(A) (Auswahl der Spalten gemäß Kopfvariablen):

$$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

2. Gegeben ist die Matrix

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   in Abhängigkeit eines Parameters $x \in \mathbb{R}$.

(a) **4 Punkte** Bestimmen Sie die Determinante von M durch Laplace-Entwicklung nach der 4. Zeile.

$$\begin{aligned}
\det M &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= -2\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & x & 0 \end{bmatrix} + 3\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & x & 0 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & x & 0 \end{bmatrix} \\
&\overset{1.\text{Zeile}}{=} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} = -2x - 6
\end{aligned}$$

(b) **2 Punkt** Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist M invertierbar?
M ist invertierbar $\Leftrightarrow \det M \neq 0$
$\Leftrightarrow -6 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

3. **9 Punkte** Gegeben ist die Basis

$$\mathcal{B} := \{\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

des $\mathbb{R}^2$.

(a) Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ bzgl. des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^2$ mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren.

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\ell}_2 &= \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} - \langle \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-5}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{\ell}_2}{\|\vec{\ell}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{16+4}} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]$.
Q enthält als Spalten die ONB aus a)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Aus $A = QR$ folgt, da Q orthogonal ist:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

4. Gegeben ist die Matrix

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) **2 Punkte** Ist $\vec{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L?
Nein, da die Vektorgleichung

$$L \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

keine Lösung hat, da sich der erste und der zweite Eintrag widersprechen.

(b) **5 Punkte** Berechnen Sie die Eigenwerte von L und die zugehörigen Eigenräume.
charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} p_L(z) &= \det(L - zE) = \det \begin{bmatrix} 1-z & 4 \\ 4 & 1-z \end{bmatrix} \\ &= (1-z)^2 - 16 = 1 - 2z + z^2 - 16 = z^2 - 2z - 15 \end{aligned}$$

Nullstellen von $p_L(z)$ sind die Eigenwerte von L.
mit $p-q$-Formel:

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4$$

Also $z_1 = 5$, $z_2 = -3$.
Eigenraum zu $z_1 = 5$:

$$V_{z_1} = \text{Kern} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \overset{II+I, I:4}{=} \text{Kern} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Spann}\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

Eigenraum zu $z_2 = -3$:

$$V_{z_2} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \overset{II-I, I:4}{=} \text{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Spann}\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

(c) **2 Punkte** Diagonalisieren Sie L, d.h. geben Sie Matrizen S und D an, so dass D eine Diagonalmatrix ist und $L = SDS^{-1}$.
In S stehen in den Spalten die Eigenvektoren, in D die entsprechenden Eigenwerte auf der Diagonalen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(d) **2 Punkte** Berechnen Sie S^{-1}.
Gauss-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \overset{II-I}{\longrightarrow} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{I+\frac{1}{2}II, \frac{1}{2}II}{\longrightarrow} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Also

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(e) **3 Punkte** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = L\vec{y}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exponentialansatz:

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= e^{tL}\vec{y}(0) = Se^{tD}S^{-1}\vec{y}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{5t} & -e^{-3t} \\ e^{5t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{5t} + e^{-3t} \\ 3e^{5t} - e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ODER
Linearkombination der Eigenvektoren:

$$\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = \frac{3}{2} e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{5t} + e^{-3t} \\ 3e^{5t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$