Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 07/08
J. Gärtner/M. Huber/R. Nabben/K. Roegner/R. Seiler 20. Februar 2008

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe
7 Punkte

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Es sei $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

a) Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$?

b) Ist M ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

c) Sind die Vektoren in M linear unabhängig?

d) Ist M eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

2. Aufgabe
13 Punkte

Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die sowohl die Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ als auch ihre Bilder enthält. Beschriften Sie die eingezeichneten Vektoren.

b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor von L zum Eigenwert 2.

c) Bestimmen Sie $L\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

d) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ im Kern von L.

e) Entscheiden Sie, ob L bijektiv ist.

f) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$ mit $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Aufgabe
8 Punkte

Finden Sie Matrizen $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{3,3}$, die die unten genannten Eigenschaften erfüllen. Vergessen Sie nicht, die geforderte Begründung anzugeben.

a) Die Matrixabbildung A_1 bildet $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ auf $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ab.

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist im Kern von A_2.

c) $\operatorname{Bild}(A_3)$ ist ein eindimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

d) $\det(A_4) = 100$, wobei A_4 nur Nullen auf der Diagonale hat.

4. Aufgabe
12 Punkte

Gegeben ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle ax + b, cx + d\rangle := 2ac + \frac{1}{2}\, b\, d.$$

Gegeben ist außerdem $\mathcal{B} = \{p, q\}$ mit $p(x) = \frac{1}{2}\,x + 1, q(x) = \frac{1}{2}\,x - 1$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ist.

b) Zeigen Sie, dass p und q orthonormiert sind bzgl. des obigen Skalarprodukts.

c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $r(x) = 3x$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.