Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

Aufgabe 1 [7 Punkte]

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Es sei $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

a) Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$?

b) Ist M ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

c) Sind die Vektoren in M linear unabhängig?

d) Ist M eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ist nicht lösbar, weil auf der rechten Seite erste und dritte Komponente immer gleich sind, dies aber für den Vektor auf der linken Seite nicht gilt. Also ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

Alternativ: Das LGS $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ liefert $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{III-I}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$, ist also nicht lösbar.

Deshalb ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

b) Aus a) folgt, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \operatorname{span}(M)$, also $\operatorname{span}(M) \neq \mathbb{R}^3$ ist. Deshalb ist M kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.

c) Wegen $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ können maximal drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sein. Da M aus vier Vektoren besteht, sind die Vektoren in M nicht linear unabhängig.

Alternativ: $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ liefert $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{III-I}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Da es Nichtkopfvariablen gibt (oder Rangargument), ist das LGS nicht eindeutig lösbar.Also hat das obige LGS nicht nur die triviale Lösung. Deshalb sind die Vektoren in M nicht linear unabhängig.

d) Da M laut b) kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist, ist M keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Alternativ: Da die Vektoren in M nach c) nicht linear unabhängig sind, ist M keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

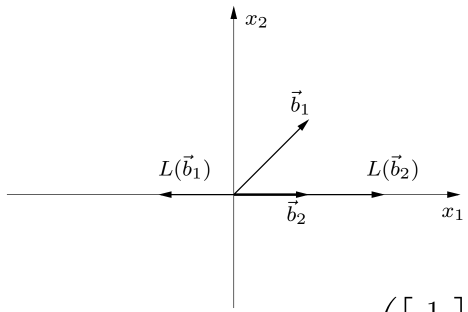
Aufgabe 2 [13 Punkte]

Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die sowohl die Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ als auch ihre Bilder enthält. Beschriften Sie die eingezeichneten Vektoren.
b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor von L zum Eigenwert 2.
c) Bestimmen Sie $L\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.
d) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ im Kern von L.
e) Entscheiden Sie, ob L bijektiv ist.
f) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$ mit $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) .



b) Aus Aufgabenstellung oder Skizze kann man $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ablesen.

Also ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L zum Eigenwert 2.

c) Mit $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist auch $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L zum Eigenwert 2. Also gilt

$$L\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alternativ: $L\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(-3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{L linear}}{=} -3L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -3\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d) Es ist $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ im Kern von L, da $L(\vec{v}) = L\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$\overset{\text{L linear}}{=} 2L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$ ist.

Hinweis: $Kern(L) = span\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

e) Nach d) gibt es einen Nichtnullvektor im Kern von L, also Kern$(L) \neq \{\vec{0}\}$, woraus folgt, dass L nicht injektiv ist. Damit ist L nicht bijektiv.

Alternative Begründungen möglich, z.B.:
Aus $L\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \text{Ł}\left(-2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -2\text{Ł}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ folgt $L\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, also ist L nicht injektiv und somit nicht bijektiv.

f) Algorithmus: Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren ergeben Spalten der darstellenden Matrix.
$L(\vec{b}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\vec{b}_2$. $L(\vec{b}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{b}_2$. Also $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 3 [8 Punkte]

Finden Sie Matrizen $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{3,3}$, die die unten genannten Eigenschaften erfüllen. Vergessen Sie nicht, die geforderte Begründung anzugeben.

a) Die Matrixabbildung A_1 bildet $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ auf $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ab.

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist im Kern von A_2.

c) $\mathrm{Bild}(A_3)$ ist ein eindimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

d) $\det(A_4) = 100$, wobei A_4 nur Nullen auf der Diagonale hat.

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ erfüllt die Bedingung, da $A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gilt.

Hinweis: Die erste Spalte von A_1 muss aus Einsen bestehen, die anderen Einträge von A_1 sind egal.

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ erfüllt die Bedingung, da $A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gilt.

Hinweis: In allen Zeilen von A_2 müssen sich erster und dritter Eintrag genau um das Vorzeichen unterscheiden. Die Einträge in der zweiten Spalte sind egal.

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ erfüllt die Bedingung, da A_3 in ZSF ist und nur eine Kopfvariable enthält. Damit ist $\dim(\mathrm{Bild}(A_3))=1$.

Alternativ: $\mathrm{Bild}(A_3)=\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ hat die Dimension 1, da $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ein lin. unabh. Erzeugendensystem des Bildes von A_3 ist.

Hinweis: Eine Spalte muss eine Nichtnullspalte sein, die anderen Spalten Vielfache (auch 'Nullfache') davon.

d) $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ erfüllt die Bedingung, da (Entwicklung 1. Zeile)

$\det(A_4) = - \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -(-100) = 100$ ist.

Aufgabe 4 [12 Punkte]

Gegeben ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit dem Skalarprodukt
$$\langle ax+b, cx+d\rangle := 2ac + \tfrac{1}{2}\, b\, d.$$
Gegeben ist außerdem $\mathcal{B} = \{p, q\}$ mit $p(x) = \frac{1}{2}\,x + 1, q(x) = \frac{1}{2}\,x - 1$.
a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ist.
b) Zeigen Sie, dass p und q orthonormiert sind bzgl. des obigen Skalarprodukts.
c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $r(x) = 3x$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

a) Wegen $\dim(\mathbb{R}_{\leq 1}[x])$=2 reicht es zu zeigen, dass die zwei Elemente p und q linear unabhängig sind:

$\lambda_1(\frac{1}{2}\,x+1) + \lambda_2(\frac{1}{2}\,x-1) = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2)x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0x + 0$

liefert das LGS $\quad \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = 0, \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

bzw. $\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{2I-II}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{2I,1/2II}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{I-II}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Weil es nur die triviale Lösung gibt, sind die zwei Polynome linear unabhängig.

Zusammen mit der ersten Bemerkung ist gezeigt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ist.

Alternativ: linear unabhängiges Erzeugendensystem nachrechnen

b) $\langle p, q\rangle = \langle \frac{1}{2}\,x+1, \frac{1}{2}\,x-1\rangle = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, also sind p und q orthogonal.

$\|p\| = \sqrt{\langle p, p\rangle} = \sqrt{\langle \frac{1}{2}\,x+1, \frac{1}{2}\,x+1\rangle} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, also ist p normiert.

$\|q\| = \sqrt{\langle q, q\rangle} = \sqrt{\langle \frac{1}{2}\,x-1, \frac{1}{2}\,x-1\rangle} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ $= 1$, also ist q normiert.

c) Da $\{p, q\}$ eine ONB ist, gilt $K_{\mathcal{B}}(r) = \begin{bmatrix} \langle r, p\rangle \\ \langle r, q\rangle \end{bmatrix}$.

$\langle r, p\rangle = \langle 3x, \frac{1}{2}\,x+1\rangle = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1 = 3$
$\langle r, q\rangle = \langle 3x, \frac{1}{2}\,x-1\rangle = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(-1) = 3$

Also ist $K_{\mathcal{B}}(r) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Alternativ: Man kann auch das LGS $r(x) = \lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x)$ lösen.