Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Gegeben sind die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,4}$ und der Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Berechnen Sie die NZSF von A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

b) Bestimmen Sie den Rang von A.

c) Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A).

d) Überprüfen Sie, ob $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ ist.

e) Geben Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ an.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{I-II}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\text{Z.tausch}}{\overset{(-1)\cdot III}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Anzahl Köpfe: Rang(A)=2

Alternative Begründungen: Anzahl Nichtnullzeilen in (N)ZSF, Rang(A)=dim(Bild(A)) und Argument für dim(Bild(A)), o.ä.

c) 'Kopfspalten' aus 'Ausgangsmatrix' A : eine Basis von Bild(A) ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Alternativ (alter Alg.): $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ in ZSF ergibt z.B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Daraus liest man die oben angegebene Basis ab.

d) einsetzen: $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1+0 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{b}$. Also ist der gegebene Vektor eine Lösung des LGS.

Alternativ kann man natürlich auch die Lösungsmenge bestimmen und überprüfen(!), ob der gegebene Vektor darin enthalten ist.

e) 'Lösungsmenge: spezielle Lösung plus Kern'

* aus d) haben wir eine spezielle Lösung des LGS
* 'Kern-Alg.' liefert (NK) $x_2 = s, x_4 = t$, (K) $x_1 = -2s + t, x_3 = -2t$.
* $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 2 [8 Punkte]

a) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, so dass das lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ keine Lösung hat. Begründen Sie Ihre Wahl beispielsweise mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.
b) Geben Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, so dass das lineare Gleichungssystem $C\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ unendlich viele Lösungen hat. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $C\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ mit der von Ihnen gewählten Matrix C.
c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{u}$, so dass die Menge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{u} \right\}$ **keine** Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

a) z.B. $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dann hat das LGS die EKM $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Aus der ZSF (ggfs. mit 'Gauß' umzuformen) liest man ab, dass Rang(A)=1<2=Rang($[A|\vec{b}]$). Also hat das LGS keine Lösung.

Alternativ kann man auch begründen, dass Bild(B)=span$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$=span$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ist, also $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin$ Bild(B), also gibt es kein $\vec{x}$ mit $B\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) z.B. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

EKM $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{I-II}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Wegen Rang(A)=Rang($[A|\vec{b}]$)=1<2=n (Anzahl Spalten/Variablen), hat die Lösungsmenge unendlich viele Elemente.

Alternativ: Weil es Nichtkopfvariablen/freie Parameter/... gibt, hat die Lösungsmenge unendlich viele Elemente.

Es gilt (NK) $x_2 = s$, (K) $x_1 = 1 - s$. Also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-s \\ s \end{bmatrix} | s \in \mathbb{R} \right\}$.

c) z.B. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Da $1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\vec{u} = \vec{0}$ nichttriviale Linearkombination des Nullvektors ist, sind die drei Vektoren linear abhängig.

Auch Argumentationen, dass man mit dem gewählten $\vec{u}$ kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ hat, möglich.

Weil die Vektoren nicht linear unabhängig (oder: kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$) sind, können sie keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 3 [11 Punkte]

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2.

Die zugehörigen Eigenräume lauten $V_{\lambda_1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von M.
b) Ist M diagonalisierbar?
c) Ist $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_1}$?
d) Lösen Sie das AWP $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = M\vec{y}(t)$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ mit $\vec{y}_0$ aus Aufgabenteil c).

a) $M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, also $\lambda_1 = -1$.

$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, also $\lambda_2 = 3$.

b) Die drei Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilden eine *Basis* des $\mathbb{C}^3$ aus *Eigenvektoren* von M (s. Eigenräume). Also ist M diagonalisierbar.

c) Wegen $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist $\vec{y}_0 \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, also $\vec{y}_0 \in V_{\lambda_1}$.

Alternativ: Überprüfung, ob $\vec{y}_0$ EV zum EW $\lambda_1 = -1$.

d) Da $\vec{y}_0$ nach Aufgabenteil c) ein *Eigenvektor* von M ist, gilt $\vec{y}(t) = e^{\lambda t}\vec{y}_0$, wobei λ der zu $\vec{y}_0$ gehörige Eigenwert ist, also $\lambda = -1$. Also $\vec{y}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Alternativ über $\vec{y}(t) = Se^{tD}S^{-1}\vec{y}_0$: Wähle S, z.B. $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wegen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I-II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Z.tausch}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ist $S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Damit $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4 [11 Punkte]

Gegeben sind die Mengen
$M_1 = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid$ die Spalten von A sind linear unabhängig$\}$,
$M_2 = \{B \in \mathbb{R}^{2,2} \mid$ die Spalten von B sind linear abhängig$\}$,
$T_1 = \{C \in \mathbb{R}^{2,2} \mid C$ hat 2 gleiche Spalten$\}$,
$T_2 = \{D \in \mathbb{R}^{3,3} \mid D$ hat mindestens 2 gleiche Spalten$\}$.
a) Begründen Sie, dass die Menge M_1 kein Teilraum von $\mathbb{R}^{2,2}$ ist, indem Sie konkrete Zahlenbeispiele angeben und erläutern.
b) Begründen Sie, dass die Menge M_2 kein Teilraum von $\mathbb{R}^{2,2}$ ist, indem Sie konkrete Zahlenbeispiele angeben und erläutern.
c) Entscheiden und begründen Sie, ob T_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.
d) Entscheiden und begründen Sie, ob T_2 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{3,3}$ ist.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin M_1$, weil die Spalten von A linear abhängig sind. ($1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$ ist nichttriviale Linearkombination des Nullvektors.) Da das Nullelement nicht in M_1 enthalten ist, kann M_1 kein Teilraum sein.

b) Es sind $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$ (da $1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}, 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$). Aber $B_1 + B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin M_2$, da die Spalten der Summe linear unabhängig sind.

c) Prüfe Teilraumkriterien

* Da die Nullmatrix zwei gleiche Spalten hat, gibt es eine Matrix mit zwei gleichen Spalten, also ist M_1 nicht leer.
* Seien $C_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix} \in T_1$.
  Es gilt $C_1 + C_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$. Da die Spalten dieser Matrix gleich sind, ist $C_1 + C_2 \in T_1$, also T_1 abgeschlossen bzgl. Addition.
* Sei $C = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \in T_1, \lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt $\lambda C = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda a \\ \lambda b & \lambda b \end{bmatrix}$. Da die Spalten dieser Matrix gleich sind, ist $\lambda C \in T_1$, also T_1 abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren.

Also ist T_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

d) Es sind $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_2$, da jeweils zwei Spalten gleich sind. Aber $D_1 + D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T_2$, da die Spalten paarweise verschieden sind. Gegenbeispiel. Also ist T_2 kein Teilraum.