Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 08
M. Huber/R. Nabben/K. Roegner 23.07.2008

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben ist das reelle homogene lineare Gleichungssystem (LGS):
$$\begin{array}{rcrl} x_1 & + & 2x_2 & = 0 \\ 4x_3 & - & 2x_2 & = 0 \\ x_1 & + & ax_3 & = 0 \end{array}$$

(a) Stellen Sie die Koeffizientenmatrix A auf und bringen Sie A in Zeilenstufenform (ZSF).

(b) Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit des Parameters a.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit des Parameters a.

2. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie, ob $M := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

3. Aufgabe

15 Punkte

Gegeben ist die Matrix $C := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes sowie die Eigenwerte von C.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind.

(c) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu dem Eigenwert 2.

(d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass die folgende Gleichung gilt: $C = SDS^{-1}$.

(e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 := \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} := \{x+1, x-1\}$ des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung $K_\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$L: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ ax+b & \mapsto & (5a-3b)x + (4a-2b) \end{array}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Bestimmen Sie $K_\mathcal{B}^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$.