Lösung zur Februar-Klausur (Verständnisteil, Aufgabe 1)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. **(8 Punkte)** Gegeben ist die orthogonale Matrix $A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ sowie der Vektor $\vec{b}_0 := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt.

a) Bestimmen Sie A^{-1}.
b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (LGS) $A\vec{x} = \vec{b}_0$.
c) Die Norm eines Vektors $\vec{b}_1 \in \mathbb{R}^3$ beträgt 2. Bestimmen Sie die Norm einer Lösung $\vec{y}$ des LGSs $A\vec{y} = \vec{b}_1$.
d) Ist jede orthogonale Matrix symmetrisch?

(a) A ist orthogonal, also ist $A^T = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) Es ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, $\vec{x} = A^T\vec{b}$, also

$$\vec{x} = = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

(c) A orthogonal $\Rightarrow \langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow A$ ist längenerhaltend, $||A\vec{x}|| = ||\vec{x}||$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Also ist $||\vec{y}|| = ||A\vec{y}|| = ||\vec{b}_1|| = 2$.

(d) Nein, nicht jede orthogonale Matrix ist symmetrisch. Gegenbeispiel ist z.B. die Matrix aus (a).

Lösung zur Februar-Klausur (Verständnisteil, Aufgabe 2)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

2. **(11 Punkte)** Gegeben ist die Matrix $C := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$. Die Matrix C kann als eine Matrixabbildung $C : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t; \vec{x} \mapsto C\vec{x}$ betrachtet werden.

a) Bestimmen Sie s und t.
b) Welche der folgenden Vektoren sind im Bild(C), welche nicht?

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie ein von Null verschiedenes Element in Kern C.

d) Ist C eine injektive Abbildung? Ist C eine surjektive Abbildung?

(a) Nach Definition der Matrixmultiplikation kann A mit Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ multipliziert werden; Ergebnis ist ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$. Also ist $s = 4, t = 3$.

(b)

1. Da A eine Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ist, können die Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ nicht im Bild liegen. Das Bild von A ist der Aufspann der Spalten, also eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

2. Für $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$: Da der Nullvektor (aus $\mathbb{R}^4$) durch lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ immer auf den Nullvektor (aus $\mathbb{R}^3$) abgebildet wird, ist der Vektor im Bild.

3. Für $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T$: Das Bild von A ist der Aufspann der Spalten, und $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T$ ist eine Linearkombination der ersten und vierten (bzw. zweiten und vierten Spalte), liegt also im Bild von A.

4. Für $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$: Das Bild von A ist der Aufspann der Spalten, und $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ liegt offensichtlich nicht im Aufspann dieser Spalten (die 3. Komponente müsste Null sein), ist also nicht im Bild von A.

(c) Der dritte Einheitsvektor wird auf $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ abgebildet, liegt also im Kern.

(d) A ist nicht injektiv, da (nach c)) der Kern nicht nur aus dem Nullvektor besteht.

A ist nicht surjektiv, da alle Vektoren mit letzter Komponente $\neq 0$ nicht im Bild liegen.

Lösung zur Februar-Klausur (Verständnisteil, Aufgabe 3)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

3. **(11 Punkte)** Die Matrix $F \in \mathbb{C}^{3,3}$ hat die Eigenvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ zu den Eigenwerten $2, -3$ bzw. 4.

a) Ist F diagonalisierbar?
b) Ist F invertierbar?
c) Bestimmen Sie $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.
d) Bestimmen Sie die Matrix F.

(a) Das charakteristische Polynom hat Grad 3, also hat es höchstens 3 Nullstellen. Also haben alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit $= 1$. Matrizen mit paarweise verschiedenen Eigenwerten sind diagonalisierbar, also ist F diagonalisierbar.

(b) 0 ist kein Eigenwert von L, L ist also invertierbar.

(c) Es ist

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(d) Die i-te Spalte von F ist gegeben durch $F(e_i)$ (mit $e_i = i-$ter Einheitsvektor), somit ist

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösung zur Februar-Klausur (Verständnisteil, Aufgabe 4)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

4. **(10 Punkte)**

a) Zeigen Sie, dass $T := \{a(x+1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ist.

b) Ist die Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2 \right\}$ abgeschlossen bezüglich

i) Addition?

ii) Multiplikation mit Skalaren?

Ist M ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$?

(a) 1. Kriterium: $T \neq \emptyset$, z.B. $x+1 \in T$.

2. Kriterium: Abgeschlossenheit bezüglich Addition.

Für alle $p_1 = a(x+1), p_2 = b(x+1) \in T$ gilt

$$p_1 + p_2 = a(x+1) + b(x+1) = (a+b)(x+1),$$

da mit $a, b \in \mathbb{R}$ auch $a+b \in \mathbb{R}$ gilt, ist also $p_1 + p_2 \in T$.

3. Kriterium: Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation mit Skalaren.

Für alle $p = a(x+1) \in T$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda p = \lambda \cdot a(x+1) = (\lambda \cdot a)(x+1),$$

da mit $a \in R$, $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda a \in \mathbb{R}$ gilt, ist also $\lambda p \in T$.

T ist also ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.

(b) Beweis der Abgeschlossenheit bezüglich Addition:

Für alle

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in M$$

ist $x_1 \geq x_2$ und $y_1 \geq y_2$, also gilt auch $x_1 + y_1 \geq x_2 + y_2$. Daher ist für

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

die erste Komponente größer als die zweite, also $\vec{x} + \vec{y} \in T$. T ist also abgeschlossen bezüglich Addition.

Widerlegen der Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation mit Skalaren:

Für alle negativen Skalare λ und alle Vektoren $\vec{x} \in M$ mit $x_1 > x_2$ ist $\lambda \vec{x} \notin T$.

M ist also kein Teilraum, da das dritte Teilraumkriterium verletzt ist.