Lösung zur April-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. (10 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante von A.
b) Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$.
c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
d) Ist A diagonalisierbar?
e) Ist die Matrix A invertierbar?

(a) Bei einer oberen Dreiecksmatrix ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, also ist $\det(A) = 0$.

(b) Die dritte und vierte Zeile sind offensichtlich linear abhängig, sodass eine ZSF von A eine Nullzeile hat. Es ergibt sich deshalb 3 Kopfvariablen, also ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

(c) Bei einer oberen Dreiecksmatrix stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Die Abbildung A hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 3$.

(d) A hat $4 = \dim \mathbb{R}^4$ paarweise verschiedene Eigenwerte, ist also diagonalisierbar nach Satz aus der Vorlesung.

(e) Aus (a) ist $\det(A) = 0$, A ist also nicht invertierbar.

---

2. (10 Punkte) Über die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ sind die folgenden Informationen bekannt:

$$L(x+1) = 2x+2 \qquad L(x-1) = 3x-3 \qquad L(x^2) = x+1$$

a) Bestimmen Sie zwei unterschiedliche Elemente in $\mathrm{Kern}(L)$.
b) Ist L eine injektive / surjektive / bijektive Abbildung?
c) Bestimmen Sie $L(4x^2 - 3x - 3)$.

(a) Es ist z.B.

$$L(2x^2 - x - 1) \;=\; 2L(x^2) \;-\; L(x+1) \;=\; 2(x+1) - 2x - 2 \;=\; 0,$$

also $2x^2 - x - 1 \in \mathrm{Kern}(L)$. Ein weiterer Vektor aus $\mathrm{Kern}(L)$ ist der Nullvektor, denn L ist linear.

(b) Injektivität: Aus a) erhält man $\mathrm{Kern}(F) \neq \{0\}$, F ist also nicht injektiv.

Surjektivität: Nach Dimensionssatz erhält man:

$$3 \;=\; \dim \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \dim \mathrm{Kern}(F) + \dim \mathrm{Bild}(F).$$

Wegen $\dim \mathrm{Kern}(F) \geq 1$ folgt $\dim \mathrm{Bild}(F) \leq 2$, also $\mathrm{Bild}(F) \neq \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, F ist also nicht surjektiv.

Bijektivität: Eine Abbildung ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist, also ist F nicht bijektiv.

(c) Es ist

$$F(4x^2 - 3x - 3) \;=\; 4F(x^2) \;-\; 3F(x+1) \;=\; 4 \cdot (x+1) - 3 \cdot (2x+2) \;=\; -2x - 2.$$

3. **(8 Punkte)** Die durch die Matrix $B := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ definierte Matrixabbildung (d.h. $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \vec{x} \mapsto B\vec{x}$) bewirkt eine Spiegelung an der Geraden $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

a) Ist B eine orthogonale Abbildung bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^2$?
b) Bestimmen Sie B^{-1}.
c) Bestimmen Sie B^{100}.
d) Bestimmen Sie einen Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor von B.

(a) Es ist

$$B^T \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

B ist also orthogonal.

(b) B ist orthogonal, also ist

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

(c) Es ist $B^{100} = (B^2)^{50} = I^{50} = I$.

(d) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ist unter Spiegelung invariant, ist also Eigenvektor zum Eigenwert 1.

---

4. **(10 Punkte)** Bestimmen Sie jeweils, ob die folgenden Abbildung linear sind.

$$\begin{array}{rccc} L_1 : & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ & ax + b & \mapsto & (a+b)x^2 + x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} L_2 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^{2,2} \\ & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} L_3 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} 3a + 2b \\ 4b \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) L_1 ist nicht linear. Es ist z.B. $L_1(0_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]}) = x \neq 0_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]}$, lineare Abbildungen bilden aber den Nullvektor immer auf den Nullvektor ab.

(b) L_2 ist nicht linear. Gegenbeispiel z.B.:

$$L_2(3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = L_2(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot L_2(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

(c) L_3 ist linear. Beweis der Additivität:

$$\begin{aligned} L_3(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}) &= L_3(\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3(a+c) + 2(b+d) \\ 4b + 4d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3a + 2b \\ 4b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c + 2d \\ 4d \end{bmatrix} = L_3(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) + L_3(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}). \end{aligned}$$

Beweis der Skalarität:

$$L_3(\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) = L_3(\begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3\lambda a + 2\lambda b \\ 4\lambda b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(3a + 2b) \\ \lambda 4b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3a + 2b \\ 4b \end{bmatrix} = \lambda L_3(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix})$$