Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS09

O. Holtz / M. v. Renesse / K. Roegner 22.7.2009

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe **(11 Punkte)**

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3},\ B := \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2},\ C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

a) Bestimmen Sie AB.

b) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zu A.

c) Bestimmen Sie die Determinante von C, indem Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz auf die 2. Zeile anwenden.

a) **(2 Punkte)** $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) **(4 Punkte)** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss - NZSF}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & -1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

c) **(5 Punkte)**

$$\det(C) = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2\left(-2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = -2(-2(0) - 2(2)) = 8$$

2. Aufgabe **12 Punkte**

Gegeben ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt $\langle , \rangle$.

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis zu überführen.

b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} -2 \\ 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ bezüglich der Orthonormalbasis

$$\mathcal{C} := \left\{ \vec{c}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{c}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{c}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \text{ des } \mathbb{R}^3.$$

$$||\vec{b}_1|| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle} = \sqrt{9+16} = 5 \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_1 = \frac{\vec{b}_1}{||\vec{b}_1||} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\ell}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{25} \left\langle \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} - \tfrac{50}{25} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$||\vec{\ell}_2|| = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\ell}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{25} \left\langle \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$||\vec{\ell}_3|| = \sqrt{64+36} = 10 \Rightarrow \vec{q}_3 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \right\}$$

Sei C die **orthogonale** Matrix $[\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3]$. Es gilt

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = C^T \begin{bmatrix} -2 \\ 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe **7 Punkte**

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2};\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto x_1 \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, für die $L(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ gilt.

b) Bestimmen Sie den Kern von L.

a) **(5 Punkte)** LGS: $x_1 \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Komponentenvergleich ergibt die EKM:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \cdots \xrightarrow{\text{Gauss - NZSF}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 + x_3 = 5, x_2 + x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$$

b) **(2 Punkte)** Kern L ist die Lösung des homogenen Systems $\Rightarrow \text{Kern}(L) = \left\{ r \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$

4. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben ist die Basis $\mathcal{D} := \{3x+1,\, 4x+1\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezüglich der Basis $\mathcal{D}$ ist gegeben durch $L_{\mathcal{D}} := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $K_{\mathcal{D}}$, die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezüglich der Basis $\mathcal{D}$.
b) Bestimmen Sie die Inverse $K_{\mathcal{D}}^{-1}$ der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{D}}$.
c) Bestimmen Sie $L(ax+b)$.

a) **(4 Punkte)** Ansatz: $K_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2; ax+b \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ mit

$\lambda_1(3x+1) + \lambda_2(4x+1) = ax+b$

Koeffizientenvergleich ergibt EKM: $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \ldots \overset{\text{Gauss - NZSF}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a+4b \\ 0 & 1 & a-3b \end{array}\right]$

$K_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2; ax+b \mapsto \begin{bmatrix} -a+4b \\ a-3b \end{bmatrix}$

b) **(2 Punkt)** $K_{\mathcal{D}}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]; \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mapsto A(3x+1) + B(4x+1)$

c) **(4 Punkte)**

$L(ax+b) = K_{\mathcal{D}}^{-1}\left(L_{\mathcal{D}}\left(K_{\mathcal{D}}(ax+b)\right)\right) = K_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a+4b \\ a-3b \end{bmatrix}\right)$

$= K_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2(-a+4b)+3(a-3b) \\ a-3b \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} a-b \\ a-3b \end{bmatrix}\right)$

$= (3(a-b)+4(a-3b))x + (2a-4b) = (7a-15b)x + (2a-4b)$