Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 09
O. Holtz/M. v. Renesse/K. Roegner 22.7.2009

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe
14 Punkte

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 := -2$ und $\lambda_2 := 3$ und erfüllt die Gleichungen:

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $A\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ sowie $A\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten -2 und 3 von A.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

d) Ist A diagonalisierbar?

e) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A_{\mathcal{B}}$ von A bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$.

f) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dfrac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2. Aufgabe
10 Punkte

Betrachten Sie die Abbildung

$$S : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{1,1}; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto [a + d].$$

a) Zeigen Sie, dass S eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie $\dim(\text{Bild}(S))$ und $\dim(\text{Kern}(S))$.

c) Ist S eine bijektive Abbildung?

3. Aufgabe
10 Punkte

Gegeben sind der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ und die Menge

$$P := \{p_1 := x^2 + x + 1, p_2 := 3x^2 + 3x, p_3 := 4x^2 + 4x - 1\} \subset V.$$

a) Bestimmen Sie ein Element $q \in V$, so dass die Gleichung $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = q$ keine Lösung hat.

b) Ist P eine Basis von V?

c) Die lineare Abbildung $L_1 : V \to \mathbb{R}^2$ bildet $3x^2 + 3x$ auf $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ ab. Bestimmen Sie $L_1(x^2 + x)$.

d) Die Polynome p_1 und p_2 sind linear unabhängig. Wenn $L_2 : V \to V$ eine **injektive** lineare Abbildung ist, sind dann auch $L_2(p_1), L_2(p_2)$ linear unabhängig?

4. Aufgabe
6 Punkte

Bestimmen Sie Matrizen $B, C, D \in \mathbb{R}^{2,2}$, die die entsprechenden Bedingungen erfüllen.

a) Die Gleichung $B\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ hat die eindeutige Lösung $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Der Rang von C ist ungleich der Anzahl der Köpfe von C.

c) Das charakteristische Polynom von D lautet $p_D(z) = z^2 - 9$, obwohl 3 und -3 nicht auf der Diagonalen liegen.