Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 09

O. Holtz/M. v. Renesse/K. Roegner 7.10.2009

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** oder eine Begründung an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ auf und bringen Sie $[A|\vec{b}]$ auf NZSF (normierte Zeilenstufenform).
b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.
c) Bestimmen Sie den Rang und den Kern der Matrix A.

2. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle p_2x^2 + p_1x + p_0\,,\, q_2x^2 + q_1x + q_0\rangle = 3p_2q_2 + p_1q_1 + p_0q_0.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} := \left\{x^2 + 1,\ x^2 - 2x - 3,\ x^2 + 6x - 3\right\}$$

des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis bzgl. des gegebenen Skalarproduktes zu überführen.

3. Aufgabe 14 Punkte

Betrachten Sie die Matrizen $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes das charakteristische Polynom von B.
b) Berechnen Sie die Eigenwerte von B sowie die algebraische Vielfachheit zu jedem dieser Eigenwerte.
c) Die Matrix C hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2$ und $\lambda_3 = 1$. Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,2} = 2$.
d) Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$ der Matrix C ist $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass $C = SDS^{-1}$.
e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe 7 Punkte

Die Inverse der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ von $V = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\}$ bzgl. einer bestimmten Basis $\mathcal{B} := \{A_1, A_2, A_3\}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{B}}^{-1} &: \mathbb{R}^3 \to V \\ &\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & \beta + \gamma - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma - \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie $\mathcal{B}$.
b) Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}}$.