Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 09

O. Holtz/M. v. Renesse/K. Roegner 7.10.2009

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe
11 Punkte

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$ definiert eine Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

a) Bestimmen Sie m und n.

b) Die NZSF (normierte Zeilenstufenform) von A hat keine Nullzeile. Ist die Matrixabbildung injektiv/ surjektiv/ bijektiv?

c) Bilden die Spalten von A ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

d) Bilden die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

2. Aufgabe
10 Punkte

Sei $V = \{B \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, B \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}$. Die lineare Abbildung $L : V \to V$ bildet die Basiselemente von $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ folgendermaßen ab:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zwei verschiedene Elemente im Kern(L).

b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von L.

3. Aufgabe
10 Punkte

Die QR-Zerlegung der Matrix $C \in \mathbb{R}^{3,3}$ sei

$$Q = [\vec{q}_1 \ \ \vec{q}_2 \ \ \vec{q}_3] = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 5 & 5 & \alpha \\ 0 & -5 & \beta \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

wobei $\vec{q}_i$ die i-te Spalte von Q für $i = 1, 2, 3$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $\langle 3\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2\,, \vec{q}_3\rangle$, $\langle 3\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2\,, \vec{q}_2\rangle$ bzgl. des Standardskalarproduktes $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie $|\det(C)|$, also den Betrag der Determinante der Matrix C.

c) Bestimmen Sie $Q^T C$.

d) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des 1. Spaltenvektors von C bzgl. der Basis $\mathcal{B}_Q = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$.

4. Aufgabe
9 Punkte

Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen M_i Teilräume der Vektorräume V_i sind $(i = 1, 2, 3)$.

- $M_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \vec{x} = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\}$, $V_1 = \mathbb{R}^2$.
- $M_2 := \{ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \,|\, ax + b = bx + a\}$, $V_2 = \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
- $M_3 := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, \det(A) = 0\}$, $V_3 = \mathbb{R}^{2,2}$.