Lösung zur Februar-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Variante B

---

1. Aufgabe

10 Punkte

a) Geben Sie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{2,2}$ an, das keine Basis ist.

b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, sodass die drei Matrizen $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

---

a) **(3 Punkte)**
z.B. ist $\mathcal{E} = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{2,2}$ aber keine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$, denn für $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ gilt

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also ist $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem, aber $\mathcal{E}$ ist keine Basis, da $\dim \mathbb{R}^{2,2} = 4$ und somit jede Basis 4 Elemente enthält, $\mathcal{E}$ aber 5.

b) **(4 Punkte)**
Zu untersuchen ist, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt. Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Überführung auf ZSF liefert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hieran kann man ablesen, dass für $t \neq 1$ als einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt. für $t \neq 1$ sind somit $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ linear unabhängig. Für $t = 1$ ist λ_3 frei wählbar und somit $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ linear abhängig.

c) **(3 Punkte)**
Für $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist $\mathcal{B}$ eine Basis: Da $\dim \mathbb{R}^{2,2} = 4$ und damit jede 4-elementige linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^{2,2}$ eine Basis ist, reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist. Es muss also gelten

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

was in der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ergibt. Als ZSF ergibt sich

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

woran man ablesen kann, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ folgt.

---

2. Aufgabe

12 Punkte

Die Matrix $G \in \mathbb{C}^{3,3}$ hat die Eigenvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ zu den Eigenwerten $-1, 0$ bzw. 1.

a) Ist G diagonalisierbar?

b) Ist G invertierbar?

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(G)$.

d) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Bild}(G))$ und $\mathrm{Bild}(G)$.

---

a) **(2 Punkte)**
G ist diagonalisierbar, weil G drei paarweise verschiedene Eigenwerte hat.

b) **(2 Punkte)**
G ist nicht invertierbar, da 0 ein Eigenwert ist und damit der Kern nicht trivial ist.

c) **(4 Punkte)**
Der Kern von G ist der Eigenraum von G zum Eigenwert 0.
Da $G \in \mathbb{C}^{3,3}$ ist und wir drei paarweise verschiedene Eigenwerte haben, ist die geometrische VFH jeweils 1, also insbesondere $\dim V_0 = \dim \mathrm{Kern}(G) = 1$.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0, also $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Kern}(G)$.

Daraus folgt $\mathrm{Kern}(G) = \mathrm{span}\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

d) **(4 Punkte)**
Nach Dimensionssatz gilt $3 = \dim(\text{Kern}(G)) + \dim(\text{Bild}(G))$, also $\dim(\text{Bild}(G)) = 2$.
Da $G(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $G(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, sind $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Bild}(G)$.
Die beiden Vektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängig und spannen daher $\text{Bild}(G)$ auf.
Daher gilt $\text{Bild}(G) = \text{span}\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\} = \{\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\}$.

---

3. Aufgabe

9 Punkte

Zu $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ sind Matrizen $Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & q & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$

gegeben. Von C sind die Einträge $c_{13} = \frac{2}{5}$ und $c_{33} = \frac{11}{5}$ bekannt.

a) Bestimmen Sie $q, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ so, dass Sie mit Q und R eine QR-Zerlegung von C erhalten.

b) Bestimmen Sie die Determinante von Q und von C.

---

a) **(5 Punkte)**
Da Q und R eine QR-Zerlegung von C bilden sollen, muss Q eine orthogonale Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix sein. Damit Q orthogonal ist, muss jede Spalte Norm 1 haben. Das einzige $q \in \mathbb{R}$, sodass die zweite Spalte von Q Norm 1 hat, ist $q = 0$.
Damit R obere Dreiecksmatrix ist, muss $r_2 = 0$ gelten.
Desweiteren muss $QR = C$ gelten. Daraus ergeben sich zur Bestimmung von r_1 und r_3 die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{13} &= \frac{3}{5}r_1 - \frac{4}{5}r_3 \\ c_{33} &= \frac{4}{5}r_1 + 2q + \frac{3}{5}r_3, \end{aligned}$$

woraus $r_1 = 2$ und $r_3 = 1$ folgt.

b) **(4 Punkte)**
Wir entwickeln nach der zweiten Spalte von Q und erhalten damit

$$\det Q = 1 \det \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = 1.$$

Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt

$$\det C = \det(QR) = \det Q \det R = 1 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 1) = 3.$$

---

4. Aufgabe

9 Punkte

a) Untersuchen Sie, ob $T := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \det A = 0\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

b) Untersuchen Sie, ob $U := \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 0\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ist.

Damit W ein Teilraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist, müssen folgende 3 Kriterien erfüllt sein:

i) $W \neq \emptyset$

ii) Für alle $w_1, w_2 \in W$ muss gelten $w_1 + w_2 \in W$.

iii) Für alle $w \in W, \lambda \in \mathbb{R}$ muss gelten $\lambda w \in W$.

(1 Punkt)

a) **(3 Punkte)**
T ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$, da ii) nicht erüllt ist: $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sind Elemente aus T, da $\det T_1 = \det T_2 = 0$. Aber $\det(T_1 + T_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, also ist $T_1 + T_2 \notin T$.

b) **(5 Punkte)**
U ist ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, da alle drei Kriterien i)-iii) erfüllt sind:

i) $U \neq \emptyset$, da das Nullpolynom $p(x) = 0$ in U enthalten ist.

ii) Seien $p_1, p_2 \in U$, also $p_1(1) = p_2(1) = 0$. Dann gilt $(p_1+p_2)(1) = p_1(1)+p_2(1) = 0+0 = 0$. Also $p_1 + p_2 \in U$.

iii) Sei $p \in U$, also $p(1) = 0$. Sei weiter $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$, also ist $\lambda p \in U$.