Lösung zur April-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

1. Aufgabe

10 Punkte

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & a-2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & a & \frac{3}{2}a \end{bmatrix}$.

a) Geben Sie ein a an, sodass A nicht invertierbar ist.

b) Geben Sie für dieses a die normierte Zeilenstufenform von A an.

c) Geben Sie Kern A für dieses a sowie die Lösungsmenge des Systems $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ an.

---

a) **(4 Punkte)**
Variante 1:
Transformiere A auf obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & a-2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & a & \frac{3}{2}a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & a-2 \\ 0 & 0 & 2a-4 \\ 0 & a-2 & a+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & a-2 \\ 0 & a-2 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a-4 \end{bmatrix} (\textbf{2 Punkte})$$

Für $a = 2$ ist A nicht invertierbar, da dann weniger als 3 Köpfe existieren in der Zeilenstufenform. **(2 Punkte)**
Variante 2:
A ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von A ungleich Null ist. **(1 Punkt)**Entwicklung nach dritter Spalte liefert:

$$\det A = (a-2)\det \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & a \end{bmatrix} + \frac{3}{2}a \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} =$$
$$(a-2)(4a-8) + \frac{3}{2}a \cdot 0 = (a-2)(4a-8) = 4(a-2)^2.(\textbf{2 Punkte})$$

Also $\det A = 0$ für $a = 2$. **(1 Punkt)**
Variante 3:
Wenn die zweite Spalte von A ein Vielfaches von der ersten ist, sind die Spalten von A linear abhängig und A damit nicht invertierbar. **(2 Punkte)** Für $a = 2$ ist die zweite Spalte das 2-fache der ersten Spalte und damit A nicht invertierbar. **(2 Punkte)**

b) **(2 Punkte)**
Normierte Zeilenstufenform für $a = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\textbf{2 Punkte})$$

(1 Punkt für eine NZSF, die aber nicht die von A ist)

c) **(4 Punkte)**

Aus der NZSF aus b) kann man Kern $A = \{\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$ ablesen.**(2 Punkte)** Für das System $A\vec{x} = \vec{b}$ erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

woraus man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ablesen kann:

$$\mathbb{L} = \{\begin{bmatrix} 1-2s \\ s \\ 1 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}.(\textbf{2 Punkte})$$

---

2. Aufgabe

7 Punkte

Sei $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)dx \quad \text{für } f, g \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x].$$

Orthonormieren sie $p_1(x) = 1$ und $p_2(x) = x$ mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Normieren von p_1:

$$q_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^2 1dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\textbf{2 Punkte})$$

Das Lot von p_2 auf den von q_1 aufgespannten Raum fällen:

$$l_2 = p_2 - \langle q_1, p_2\rangle q_1 = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 xdx\frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2) = x - 1(\textbf{2 Punkte})$$

Normieren von l_2:

$$q_2 = \frac{l_2}{\|l_2\|} = \frac{x-1}{\sqrt{\int_0^2 (x-1)^2dx}} = \frac{x-1}{\sqrt{\int_0^2 x^2 - 2x + 1dx}} = \frac{x-1}{\sqrt{\frac{8}{3} - 4 + 2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}(x-1)(\textbf{2 Punkte})$$

q_1 und q_2 sind die bzgl. des Skalarprodukts mit dem Gram-Schmidt-Verfahrens orthonormierten Polynome von p_1 und p_2.**(1 Punkt)**

---

3. Aufgabe

12 Punkte

Sei $M = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a + d = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass M ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$ eine Basis von M ist.

c) Bestimmen Sie die Dimension von M.

---

a) **(6 Punkte)**

Zu zeigen ist, dass M i) nicht leer ist, ii) abgeschlossen bzgl. Addition und iii) abgeschlossen bzgl. skalarer Multiplikation ist. **(1 Punkt)**

i) M ist nicht leer, da z. B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$, da $0+0=0$.**(1 Punkt)**(Begründung wichtig, da leicht geraten werden kann!)

ii) Seien $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in M, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$, also $a_1 + d_1 = 0$ und $a_2 + d_2 = 0$. **(1 Punkt)**Dann gilt $A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M$, da

$$(a_1 + a_2) + (d_1 + d_2) = (a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) = 0 + 0 = 0.$$

Also ist M abgeschlossen bzgl. Addition. **(1 Punkt)**

iii) Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$, also $a + d = 0$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. **(1 Punkt)**Dann ist $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \in M$, da $\lambda a + \lambda d = \lambda(a+d)\lambda 0 = 0$. Also ist M abgeschlossen bzgl. skalarer Multiplikation.**(1 Punkt)**

M ist also Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

b) **(5 Punkte)**
Man sieht leicht, dass $\mathcal{B}$ eine Teilmenge von M ist. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{B}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von M ist. **(1 Punkt)**Für die lineare Unabhängigkeit ist zu zeigen, dass aus dem Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. **(1 Punkt)**Wir erhalten als erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

die als Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

besitzt. Daraus können wir $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$ ablesen.**(1 Punkt)**Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem ist, müssen wir für jedes $A \in M$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ finden mit

$$A = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\textbf{(1 Punkt)}$$

Da $A \in M$ ist, gibt es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Wir erhalten also als Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \\ -1 & 0 & 0 & -a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

was mit $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + b - c$ und $\lambda_3 = c - a$ gelöst wird. **(1 Punkt)**

c) **(1 Punkt)**
In b) wurde gezeigt, dass eine Basis von M drei Elemente besitzt, also ist $\dim M = 3$.

---

4. Aufgabe

11 Punkte

Sei V der Raum der unteren Dreicksmatrizen des $\mathbb{R}^{2,2}$. Sei eine Basis $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$ von V mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ gegeben. Weiter sei die lineare Abbildung

$$L : V \to V, \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ c+2a & a \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. $\mathcal{B}$.

---

a) **(4 Punkte)**
Für eine Matrix $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C. (\textbf{1 Punkt})$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & c-b+a \end{array}\right], (\textbf{1 Punkt})$$

was als Lösung $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b - a$ und $\lambda_3 = b - a - c$ hat. **(1 Punkt)**Damit ergibt sich als Koordinatenabbildung

$$K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^3, \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b-a \\ b-a-c \end{bmatrix}. (\textbf{1 Punkt})$$

b) **(7 Punkte)**
Bilder der Basisvektoren:

$$L(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad L(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. (\textbf{3 Punkte})$$

Als Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren ergeben sich

$$K_{\mathcal{B}}(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{B}}(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{B}}(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. (\textbf{3 Punkte})$$

Die Koordinatenvektoren bilden die Spalten von $L_{\mathcal{B}}$. Somit gilt

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. (\textbf{1 Punkt})$$

alternativ: $L_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}$, **(1 Punkt)**also

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}}(\vec{x}) &= K_{\mathcal{B}}(L(x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix})) \\ &= K_{\mathcal{B}}(L(\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 + x_2 & x_2 - x_3 \end{bmatrix})) = K_{\mathcal{B}}(\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & x_1 \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_3 \\ -x_3 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} (\mathbf{5\ Punkte}) \end{aligned}$$

(für jedes Gleichheitszeichen ein Punkt).

Also $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.(**1 Punkt**)