Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 10
R. Nabben/C. Schröder 22.07.2010

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. "Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript" gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ auf und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform (NZSF).

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A.

(d) A definiert eine Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; \vec{x} \mapsto A\vec{x}$. Bestimmen Sie m und n.

(e) Ist die Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ injektiv/surjektiv/bijektiv?

(f) Überprüfen Sie, ob $\begin{bmatrix} 78 \\ -78 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Bild}(A)$.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Matrix $B := \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ und ein Eigenvektor $\vec{w} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ der Matrix B.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(c) Zu welchem Eigenwert gehört der Eigenvektor $\vec{w}$ der Matrix B?

(d) Bestimmen Sie zwei verschiedene Vektoren im Kern von B.

(e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = B\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \vec{w}$.

3. Aufgabe

5 Punkte

Wählen Sie aus der Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis $\mathcal{D}$ des dreidimensionalen Vektorraums $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine Basis von V ist.

4. Aufgabe

12 Punkte

Bestimmen Sie jeweils, ob die Aussage für $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2,2}$ wahr oder falsch ist.

(a) Ist die Matrix A nicht invertierbar, so ist A auch nicht diagonalisierbar.

(b) Die Determinante von B und die Determinante der normierten Zeilenstufenform von B sind gleich.

(c) Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Matrix C zum Eigenwert -3, so ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Matrix C^2 zum Eigenwert 9.

(d) Ist $|\det(D)| = 1$, so ist D eine orthogonale Matrix.

5. Aufgabe

12 Punkte

Die Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ beim Basiswechsel von einer bestimmten Basis $\mathcal{B}$ des Vektorraums $W := \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ zu der Basis $\mathcal{C} := \{x+1, x-1\}$ von W sei gegeben durch $S := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Ferner sei die darstellende Matrix der linearen Abbildung $L : W \to W$ bzgl. der Basis $\mathcal{C}$ durch $L_{\mathcal{C}} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie S^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich $\mathcal{B}$ mit Hilfe von S.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{C}}$ von W bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ sowie $K_{\mathcal{C}}^{-1}$, die inverse der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{C}}$.

(d) Bestimmen Sie die Basis $\mathcal{B}$ von W.

6. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie jeweils, ob die gegebenen Abbildungen F_1 und F_2 linear sind:

$$F_1 : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^{2,2}; ax+b \mapsto \begin{bmatrix} a+3b & 0 \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix} \qquad F_2 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}; A \mapsto 3A + 2I$$