Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS10
R. Nabben / C. Schröder 11.10.2010

Oktober – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe 13 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ sowie $V_{\lambda_{1/2}} := \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie Kern(A).

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

(c) Der Eigenraum zu dem Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 ist $V_{\lambda_{1/2}}$. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Lösung:

(a) Nach dem Algorithmus zur Berechnung des Kerns einer Matrix bringen wir zunächst die Matrix auf NZSF

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\cdot \text{II}]{\text{III}+2\text{I}} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{I}+3\cdot\text{II}]{\text{III}+\text{II}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also ist der Kern von A gegeben durch

$$\text{Kern}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(z) = \det(A - zI) = \det\left(\begin{bmatrix} 5-z & -3 & 3 \\ 0 & -1-z & 0 \\ -10 & 5 & -6-z \end{bmatrix} \right) = (-1-z) \det\left(\begin{bmatrix} 5-z & 3 \\ -10 & -6-z \end{bmatrix} \right)$$
$$= (-1-z)\,[(5-z)(-6-z)+30] = (-1-z)(z^2+z) = -(1+z)(z+1)z = -1(z+1)^2 z.$$

Die Eigenwerte sind somit (als Nullstellen von p_A) $\lambda_{1/2} = -1$ und $\lambda_3 = 0$.

(c) (A ist diagonalisierbar, da die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte gleich den geometrischen Vielfachheiten sind.) In D stehen die Eigenwerte und in S stehen zugehörige, linear unabhängige Eigenvektoren (die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind die nichttrivialen Vektoren im Kern von A), also können D und S so gewählt werden:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Da der Anfangswert y_0 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 ist, ist die Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(-1)(t-3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{(3-t)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien der drei-dimensionalen Vektorraum $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}$ sowie die Teilmenge $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ von V.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

(b) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von V bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ von V.

(c) Bestimmen Sie den Urbildraum und Bildraum der darstellender Matrix $L_\mathcal{B}$ einer linearen Abbildung $L : V \to V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung:

(a) Da $\mathcal{B}$ drei Elemente enthält und V dreidimensional ist, reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V ist. (Alternativ kann gezeigt werden, dass die Vektoren in $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind. Dies ist meist einfacher, jedoch in Teilaufgabe b) ist die Koordinatenabbildung von V bzgl. $\mathcal{B}$ gefragt. Unser Lösungsansatz ist deshalb effizienter.) Dies führt auf das LGS

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ 0 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Nun bringen wir die EKM auf NZSF

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 2 & 2 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-2a \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-c+2a \\ 0 & 0 & 1 & c-2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a-b+c \\ 0 & 1 & 0 & 2a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & -2a+c \end{array}\right].$$

Es gilt $\text{Rang}([A|\vec{b}]) = \text{Rang}(A)$, also existiert mindestens eine Lösung.
Also ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V und damit auch eine Basis von V.

(b) Die Koordinatenabbildung wurde bereits in Teilaufgabe (a) berechnet. Sie ist gegeben durch

$$\begin{array}{cccc} K_\mathcal{B} : & V & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} -a-b+c \\ 2a+b-c \\ -2a+c \end{bmatrix}. \end{array}$$

(c) $L_\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, da $\dim(V) = 3$, also sind der Urbildraum und der Bildraum gleich $\mathbb{R}^3$.

3. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $\det(A) = 4$ sowie der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 98 \\ -17 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie Kern(A) und Bild(A).

(b) Wie viele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$?

(c) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform von A.

(d) Bestimmen Sie $\det(AA^T)$.

Lösung:

(a) Da $\det(A) \neq 0$ ist, ist A invertierbar. Somit ist $\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Nach dem Dimensionssatz folgt $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$.

(b) Da A invertierbar ist, hat das LGS genau eine Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

(c) Da A invertierbar ist, ist $\text{Rang}(A) = 2$, also ist die NZSF von A gleich I_2.

(d) Es gilt $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2 = 16$.

4. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien die euklidischen Vektorräume:

$$V = \mathbb{R}^3 \text{ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt}$$

$$W = \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \text{ ausgestattet mit einem Skalarprodukt}$$

$$\langle p, q\rangle_{\alpha,\beta} := \langle p_1x + p_0, q_1x + q_0\rangle_{\alpha,\beta} := \alpha p_1q_1 + \beta p_0q_0,\ \alpha, \beta \text{ positive reelle Zahlen}$$

Die Basen $\mathcal{B} := \left\{ \vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ von V und $\mathcal{C} := \{w_1 := 3x+3, w_2 := x-2\}$ von W seien auch gegeben.

(a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B}$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ zu überführen.

(b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $w := 2x + 2$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

(d) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_{\alpha,\beta}$ die Polynome w_1 und w_2 orthogonal sind und das Polynom w_1 normiert ist.

Lösung:

(a) **Nomieren von $\vec{v}_1$:**

Es ist $\|\,\vec{v}_1\,\| = \sqrt{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle} = 1$, also ist $\vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lot fällen von $\vec{v}_2$:

$$\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{q}_1\rangle \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nomieren von $\vec{l}_2$:

Es ist $\left\|\,\vec{l}_2\,\right\| = \sqrt{\langle \vec{l}_2, \vec{l}_2\rangle} = \sqrt{2}$, also ist $\vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lot fällen von $\vec{v}_3$:

$$\vec{l}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{q}_1\rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{q}_2\rangle \vec{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nomieren von $\vec{l}_3$:

Es ist $\left\|\,\vec{l}_3\,\right\| = \sqrt{\langle \vec{l}_3, \vec{l}_3\rangle} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also ist $\vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Antwort:

Also ist $\mathcal{B}_{ONB} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) Da die Spalten von B die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind, ergibt sich die Matrix $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Für die obere Dreicksmatrix erhalten wir

$$R = Q^T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(c) Zu lösen ist das System

$$2x + 2 = \alpha_1(3x+3) + \alpha_2(x-2) = \frac{2}{3}(3x+3) + 0(x-2)$$

Somit ist $(2x+2)_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Damit w_1 und w_2 orthogonal sind, muss gelten

$$0 = \langle w_1, w_2 \rangle_{\alpha,\beta} = \langle 3x+3, x-2 \rangle_{\alpha,\beta} = 3\alpha - 6\beta.$$

Damit w_1 normiert ist, muss gelten

$$1 = \langle w_1, w_1 \rangle_{\alpha,\beta} = \langle 3x+3, 3x+3 \rangle_{\alpha,\beta} = 9\alpha + 9\beta.$$

Dies ergibt wieder ein LGS mit folgender EKM und NZSF:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot \mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{II}-9\cdot\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 27 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{27}\cdot\mathrm{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{27} \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{27} \\ 0 & 1 & \frac{1}{27} \end{array}\right]$$

Also muss $\alpha = \frac{2}{27}$ und $\beta = \frac{1}{27}$ sein.

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}^3$, die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie zwei Elemente in Kern(L).

(b) Bestimmen Sie zwei Eigenwerte von L und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor.

Lösung:

(a) Da L eine lineare Abbildung ist, ist $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Außerdem gilt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - 3\cdot L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Also liegen $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ im Kern von L.

(b) Da $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ im Kern von L liegt, gilt $L\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0\cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, d.h. 0 ist ein Eigenwert von L mit Eigenvektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Außerdem ist laut Aufgabenstellung $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, d.h. 3 ist ein Eigenwert von L mit Eigenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Aufgabe

8 Punkte

(a) Überprüfen Sie, ob $M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_3 - 4x_2 - x_1 = 0 \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Überprüfen Sie, ob $M_2 := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, 0 \text{ ist eine Eigenwert von } A\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

Lösung:

(a) Um zu zeigen, dass M_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist, überprüfen wir die drei Teilraumeigenschaften

- **M_1 ist nichtleer**:
  Es gilt $2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 0 = 0$, also ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in M_1$, d.h. $M_1 \neq \emptyset$.
- **M_1 ist abschlossen bzgl. der Addition**:
  Seien $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in M_1$, d.h. $2x_3 - 4x_2 - x_1 = 0$ und $2y_3 - 4y_2 - y_1 = 0$. Dann ist auch
  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} \in M_1$, da
  $$2(x_3 + y_3) - 4(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = (2x_3 - 4x_2 - x_1) + (2y_3 - 4y_2 - y_1) = 0 + 0 = 0.$$
- **M_1 ist abschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation**:
  Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in M_1$, d.h. $2x_3 - 4x_2 - x_1 = 0$. Dann ist auch
  $\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix} \in M_1$, da
  $$2(\lambda x_3) - 4(\lambda x_2) - (\lambda x_1) = \lambda(2x_3 - 4x_2 - x_1) = \lambda 0 = 0.$$

Also ist M_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

(b) M_2 ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$. Betrachte folgendes Gegenbeispiel. Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2,$$

da bei obere Dreiecksmatrizen die Eigenwerte auf der Diagonalen liegen, also jeweils 0 und 1. Jedoch besitzt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

den doppelten Eigenwert 1 (inbesondere ist 0 kein Eigenwert). Also ist M_2 nicht abgeschlossen bzgl. der Addition und somit kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.