Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11
C. Schröder, R. Seiler, M. Weiser 18.07.2011

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe
8 Punkte

Gegeben sei die invertierbare Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und $\vec{b} := \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie Kern(A).

(a) **(4 Punkte)**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III+I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) **(2 Punkte)**

$$A\vec{x} = \vec{b} \underset{A \text{ inv.}}{\Leftrightarrow} A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)**

Da A invertierbar ist, gilt Kern$(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.

---

2. Aufgabe
12 Punkte

Gegeben seien $D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und $\vec{y}_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_D der Matrix D.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von D und den Eigenraum zum größten Eigenwert. (zur Kontrolle für Sie: Alle Eigenwerte sind reell.)

(c) Berechnen Sie $D\vec{y}_0$ und lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = D\vec{y}(t)$ für $\vec{y}(5) = \vec{y}_0$.

(a) **(3 Punkte)**

$$p_D(x) = \det(D - x \cdot I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 0 & 3 \\ 3 & -2-x & 5 \\ -1 & 0 & -3-x \end{bmatrix} \right) \underset{\text{2. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-2-x) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 3 \\ -1 & -3-x \end{bmatrix} \right)$$

$$= (-2-x)\left[(1-x)(-3-x)+3\right]$$

$$= (-2-x)(x^2+2x) = -x(2+x)^2$$

(b) **(6 Punkte)**

Die Nullstellen von $p_D(x)$ sind die Eigenwerte von D: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = -2$. 2

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist:

$$V_{\lambda_1} = \text{Kern}(D - 0 \cdot I_3) = \text{Kern}(D) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) **(3 Punkte)**

$$D\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{y}_0$ ist also Eigenvektor von D zum Eigenwert -2.

$$\vec{y}(t) = e^{-2(t-5)} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{10-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

3. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei der Teilraum $V := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a + c = 0 \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Geben Sie eine Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ an, sodass $\mathcal{N}$ eine Basis von V ist. Zeigen Sie, dass Ihre gewählte Menge $\mathcal{N}$ eine Basis von V ist.

(b) Orthonormieren Sie Ihre gewählte Basis $\mathcal{N}$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

(a) **(8 Punkte)**

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hat die eindeutige Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$:

$0\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$3\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Die beiden Vektoren sind also linear unabhängig.

Damit $\mathcal{N}$ auch ein Erzeugendensystem von V ist, muss gelten span $\mathcal{N} = V$.

span $\mathcal{N} \subseteq V$, da $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \in V$, da $0 + 0 = 0$ bzw. $2 + (-2) = 0$ und V ein Vektorraum ist. (1)

Damit auch $V \subseteq$ span $\mathcal{N}$ gilt, muss sich jeder Vektor $\vec{v} := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in V$ (es gilt also: $a + c = 0$) als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{N}$ darstellen lassen.

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ führt auf folgendes LGS:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \\ 0 & -2 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III+I}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \\ 0 & 0 & a+c \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & a+c \end{array}\right] \xrightarrow[a+c=0]{\text{n.V.}} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Da rang(KM)= 2 =rang(EKM), existiert für alle $\vec{v} \in V$ eine solche Linearkombination und es gilt somit auch $V \subseteq$ span $\mathcal{N}$. (2)

Aus (1) und (2) folgt, span $\mathcal{N} = V$, also $\mathcal{N}$ Erzeugendensystem von V.

$\mathcal{N}$ ist somit wie gefordert eine Basis von V.

(b) **(3 Punkte)**

$$\vec{q}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+3^2+0^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \underbrace{< \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} >}_{=0} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{N}$ mit Gram-Schmidt orthonormalisiert ist also $\mathcal{N}_{\text{ONB}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien mit $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ und $\mathcal{C} := \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^3$, sowie die linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, von der folgendes bekannt sei:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Ist L bijektiv?

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(d) Sei $T_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix beim Basiswechsel von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie den Basisvektor $\vec{c}_3$ der Basis $\mathcal{C}$.

(a) **(3 Punkte)**
Wegen der Linearität von L gilt:

$$L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = L\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 2L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(b) **(2 Punkte)**

$\text{Kern}(L) \neq \left\{\vec{0}\right\}$, da z.B. $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$.

L ist also nicht injektiv und somit auch nicht bijektiv.

(c) **(3 Punkte)**
Die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren bilden die Spalten von $L_{\mathcal{B}}$.

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$
$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$
$$L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$
$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(d) **(3 Punkte)**

$$\vec{c}_3 = K_{\mathcal{C}}^{-1}(\vec{e}_3) \underset{\text{Komm. Diag.}}{=} K_{\mathcal{B}}^{-1}(T\vec{e}_3) = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= 3\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Teilräume des $\mathbb{R}^{2,2}$ sind.

(a) $M_1 := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} | A \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $M_2 := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} | A \text{ ist diagonalisierbar} \right\}$

(a) **(5 Punkte)**
$M_1 \neq \emptyset$, da $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Für $A_1, A_2 \in M_1$ ist $A_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $A_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sodass gilt:
$(A_1 + A_2) \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \underset{Distr.}{=} \underbrace{A_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}}_{=\vec{0}\text{ (n.V.)}} + \underbrace{A_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}}_{=\vec{0}\text{ (n.V.)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A_1 + A_2) \in M_1$.
Also ist M_1 abgeschlossen bzgl. Addition.
Für $A \in M_1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $A \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, sodass gilt:
$(\alpha A) \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\left(A \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right)}_{=\vec{0}\text{ (n.V.)}} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\alpha A) \in M_1$.
Also ist M_1 abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Skalaren.
M_1 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$, da nicht leer und abgeschlossen bezüglich den Vektorraumoperationen.

(b) **(5 Punkte)**
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$ und $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$, da beides obere Dreiecksmatrizen mit Eigenwerten 1 und 0 bzw. -1 und 0, also jeweils paarweise verschieden, und somit diagonaliserbar.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit Eigenwert $\lambda = 0$ und $\text{algVFH}(\lambda) = 2$.
$\text{geomVFH}(\lambda) = \dim(\text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 0 \cdot I_2 \right)) = \dim(\text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)) = \dim(\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}) = 1$
$\text{algVFH}(\lambda) = 2 \neq 1 = \text{geomVFH}(\lambda) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin M_2$, da nicht diagonalisierbar.
M_2 ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$, da nicht abgeschlossen bzgl. der Addition.

---

6. Aufgabe

8 Punkte

(a) Ein Eigenwert von $F \in \mathbb{R}^{2,2}$ ist 0. Zeigen Sie, dass 0 auch ein Eigenwert von F^2 ist.

(b) Geben Sie falls möglich eine lineare Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\dim(\text{Kern}(G)) = 0$ an. Begründen Sie Ihre Wahl bzw. warum es eine solche Abbildung nicht geben kann.

(c) Geben Sie falls möglich eine lineare Abbildung $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\dim(\text{Kern}(H)) = 3$ an. Begründen Sie Ihre Wahl bzw. warum es eine solche Abbildung nicht geben kann.

(a) **(3 Punkte)**
Ist 0 Eigenwert von F, dann existiert ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$, sodass $F\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Dann gilt $F^2\vec{x} = F(F\vec{x}) \underset{n.V.}{=} F\vec{0} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$. Also ist 0 auch Eigenwert von F^2.

(b) **(3 Punkte)**
Eine solche Abbildung kann es nicht geben. Nach Dimensionssatz gilt
$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \underbrace{\dim(\text{Kern}(G))}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(\text{Bild}(G))}_{\leq 2}$, da $\text{Bild}(G)$ Teilraum des $\mathbb{R}^2$.
Also ist $\dim(\text{Kern}(G)) \neq 0$ für alle linearen Abbildungen $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(c) **(2 Punkte)**
Für $H\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist $\text{Bild}(H) = \left\{ \vec{0} \right\}$, also $\dim(\text{Bild}(H)) = 0$. Nach Dimensionssatz gilt dann $\dim(\text{Kern}(H)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Bild}(H)) = 3 - 0 = 3$.