Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11
C. Schröder, R. Seiler, M. Weiser 10.10.2011

Oktober – Klausur – Lösungsskizze
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenräume.

(c) Entscheiden Sie, ob $\text{Kern}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$ gilt.

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) **(2 Punkte)**

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-x & -1 \\ -4 & 2-x \end{bmatrix}\right) \quad = (2-x)^2 - 4 \quad = x^2 - 4x = x(x-4)$$

(b) **(5 Punkte)**

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des char. Polynoms: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 4$.

Die zugehörigen Eigenräume sind:

$$V_{\lambda_1} = \text{Kern}(A-0I) = \text{Kern}(A) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{II}+2\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{\frac{1}{2}\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{Kern}(A-4I) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{II}-2\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{-\frac{1}{2}\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(c) **(1 Punkt)**

Nach b) ist 0 Eigenwert von A. Also ist $\text{Kern}(A) \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

(d) **(3 Punkte)**

$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist Linearkombination von Eigenvektoren von A: $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}(t) = e^{0t}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + e^{4t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + e^{4t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{e^{4t}}{2} \\ 1 + e^{4t} \end{bmatrix}$$

---

2. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 3 \\ 2 & 3\beta & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes $\det(B)$ in Abhängigkeit vom Parameter β.

(b) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, sodass B invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie $\det(2B)$ für $\beta = \frac{3}{2}$.

(a) **(4 Punkte)**

$$\det(B) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 3 \\ 2 & 3\beta & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{3. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & \beta & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} -2 \cdot \left(\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \beta & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$= -2(-1 + 2 + \beta - 3) \quad = -2(\beta - 2) \quad = -2\beta + 4$$

(b) **(3 Punkte)**
B ist invertierbar, falls $\det(B) \neq 0$.
$\det(B) = -2\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = 2$
Also ist B für alle $\beta \neq 2$ invertierbar.

(c) **(2 Punkte)**
$\det(2B) = 2^4 \cdot \det(B) \quad = 2^4(-2\frac{3}{2} + 4) = 2^4 \cdot 1 = 2^4 \quad = 16$

---

3. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung L und die Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ ax^2 + bx + c & \mapsto & (b+c)x^2 + 4a \end{array} \quad , \quad \mathcal{B} := \left\{x^2 - 2,\, x - 1,\, 2x\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie $\text{Kern}(L)$.
(b) Ist L injektiv/surjektiv/bijektiv?
(c) Bestimmen Sie $L_{\mathcal{B}}$, d.h. die darstellende Matrix von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.
(d) Geben Sie ein von Null verschiedenes Element aus $\text{Kern}(L_{\mathcal{B}})$ an.

(a) **(3 Punkte)**
Für $ax^2 + bx + c \in \text{Kern}(L)$ gilt: $L(ax^2 + bx + c) = (b+c)x^2 + 4a = 0x^2 + 0x + 0$
Koeffizientenvergleich ergibt folgendes LGS: $b + c = 0 \Leftrightarrow c = -b,\; a = 0$.
$b := s \in \mathbb{R} \Rightarrow c = -s$
$\text{Kern}(L) = \{sx - s \mid s \in \mathbb{R}\} \quad = \{s(x-1) \mid s \in \mathbb{R}\} = \text{span}\,\{x - 1\}$

(b) **(3 Punkte)**
Nach a) ist $\dim(\text{Kern}(L)) = 1 \neq 0$. $\Rightarrow$ L ist nicht injektiv.
$\Rightarrow$ L ist nicht bijektiv.
Aus dem Dimensionssatz folgt dann $\dim(\text{Bild}(L)) = 2$:
$\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = 3 = \underbrace{\dim(\text{Kern}(L))}_{=1} + \underbrace{\dim(\text{Bild}(L))}_{=2}$
Da $\dim(\text{Bild}(L)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x])$, ist L auch nicht surjektiv.

(c) **(6 Punkte)**
Spaltenweise Bestimmung von $L_{\mathcal{B}}$:
1. Spalte ist $L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}(L(x^2 - 2)) = K_{\mathcal{B}}(-2x^2 + 4)$
$= K_{\mathcal{B}}(-2(x^2 - 2)) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2. Spalte ist $L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}(L(x - 1)) = K_{\mathcal{B}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
3. Spalte ist $L_{\mathcal{B}}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}}(L(2x)) = K_{\mathcal{B}}(2x^2)$
$= K_{\mathcal{B}}(2 \cdot (x^2 - 2) - 4 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (2x)) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) **(2 Punkte)**
Nach a) ist $x - 1 \in \text{Kern}(L)$. Also ist $K_{\mathcal{B}}(x - 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L_{\mathcal{B}})$

4. Aufgabe

9 Punkte

Die untenstehenden Matrizen $Q, R \in \mathbb{R}^{2,2}$ bilden eine QR-Zerlegung der Matrix $D \in \mathbb{R}^{2,2}$, d.h., es gilt $D = QR$ mit Q orthogonal und R obere Dreiecksmatrix.

$$Q := [\vec{q}_1\ \vec{q}_2] \text{ mit } \vec{q}_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \vec{q}_2 := \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \text{ und } R := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Q^{-1} und R^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $D\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(c) Stellen Sie $D \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Linearkombination der Spalten von Q dar.

(a) **(4 Punkte)**

Da Q orthogonal ist, gilt $Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I+4II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\text{II}]{\frac{1}{2}\text{I}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) **(3 Punkte)**

$$D\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow QR\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \underset{Q\text{ inv.}}{\Leftrightarrow} \underbrace{Q^{-1}Q}_{=I_2} R\vec{x} = Q^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow R\vec{x} = Q^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R\text{ inv.}}{\Leftrightarrow} \underbrace{R^{-1}R}_{=I_2}\vec{x} = R^{-1}Q^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = R^{-1}Q^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 22 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 19 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(c) **(2 Punkte)**

$$D\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = QR\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = 6\vec{q}_1 - \vec{q}_2$$

---

5. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} 2a+b \\ -b \\ b \end{bmatrix} \end{array}, \quad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & x + (a+2b) \end{array}, \quad F_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a-c \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift der Komposition $F_1 \circ F_3$.

(b) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(c) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(a) **(3 Punkte)**

$$(F_1 \circ F_3)\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = F_1\left(F_3\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} a-c \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(a-c) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) **(4 Punkte)**

Für $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist:

$$F_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) + F_1\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a+b \\ -b \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c+d \\ -d \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c)+(b+d) \\ -(b+d) \\ b+d \end{bmatrix}$$

$$= F_1\left(\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right)$$

F_1 ist also additiv.

$F_1\left(\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\alpha a + \alpha b \\ -\alpha b \\ \alpha b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2a+b \\ -b \\ b \end{bmatrix} = \alpha F_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$

F_1 ist also auch homogen.

Da additiv und homogen, ist F_1 eine lineare Abbildung.

(c) **(2 Punkte)**

$F_2\left(0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x \neq 0 = 0 \cdot F_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

F_2 ist nicht linear, da nicht homogen.

6. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei der zweidimensionale Vektorraum $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ diagonal}\}$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt M_1 und die Menge $\mathcal{C}$:

$$< \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} >_{M_1} := a_1 b_1 + 2a_2 b_2 \quad , \qquad \mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq V \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ eine Basis von V ist.

(b) Überführen Sie die Basis $\mathcal{C}$ mithilfe von Gram-Schmidt in eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}_{\text{ONB}}$ von V.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung kein Skalarprodukt auf V definiert:

$$< \cdot, \cdot >_{M_2} : V \times V \to \mathbb{R} \ ; \ < \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} >_{M_2} := a_1 b_1 - a_2 b_2 \ .$$

(a) **(3 Punkte)**

Da V nach Aufgabenstellung zweidimensional ist, bilden zwei linear unabhängige Vektoren aus V eine Basis von V. $\mathcal{C} \subseteq V$ besitzt zwei Elemente. Bleibt zu zeigen, dass diese linear unabhängig sind:

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Komponentenvergleich führt auf das homogene LGS: $2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \ 4\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist also gleich der Anzahl der Spalten, nämlich 2. Das homogene LGS hat folglich nur die eindeutige Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Somit ist $\mathcal{C}$ eine Basis von V.

(b) **(3 Punkte)**

$Q_1 = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 4}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$L_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} >_{M_1} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \underbrace{< \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} >_{M_1}}_{=4\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 2 = 0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$Q_2 = \dfrac{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 4 + 2\cdot(-1)\cdot(-1)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{C}_{\text{ONB}} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) **(2 Punkte)**

$< \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} >_{M_2} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$

M_2 ist nicht positiv definit und definiert somit kein Skalarprodukt auf V.