Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
F. Aurzada, L. Knipping, R. Nabben, C. Schröder

WS 11/12
24.02.2012

Februar – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze Klausurvariante A

---

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ und $\vec{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ auf normierte Zeilenstufenform.
(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.
(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(A)$.
(d) Bestimmen Sie den Rang von A^T.

(a) **(3 Punkte)**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II}-3\text{I}]{\text{III}+2\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I}+\frac{1}{2}\text{II}]{-\frac{1}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) **(4 Punkte)**
Aus der NZSF(A) folgt, dass x_1, x_3 Kopfvariablen sind. Setze $x_2 := s, x_4 := t \in \mathbb{R}$. Kopfvariablen als Linearkombination von x_2, x_4 darstellen:
$x_1 = 2x_2 - x_4 = 2s - t$ und $x_3 = 2 + 2x_4 = 2 + 2t$. 2

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)**
Die erste und dritte Spalte der NZSF(A) haben Köpfe. Also bilden die erste und dritte Spalte der Ausgangsmatrix A eine Basis von Bild(A) : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) **(2 Punkte)**
Der Spaltenrang ist gleich dem Zeilenrang. Also gilt rang(A) =rang(A^T). Der Rang von A ist 2, da nach a) die NZSF(A) zwei Köpfe hat. Also ist der Rang von A^T ebenfalls 2.

---

2. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und der Vektor $\vec{w} := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.
(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und den Eigenraum zum größten Eigenwert.
(c) Ist B diagonalisierbar?
(d) Zeigen Sie, dass $\vec{w}$ ein Eigenvektor von B ist.
(e) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = B\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = 7\vec{w}$.

(a) **(3 Punkte)**

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) \underset{\text{2. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (2-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$= (2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(4-\lambda) + 8\right]$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$$

(b) **(5 Punkte)**
Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $p_B(\lambda)$: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = 2$. 2
Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist:

$$V_{\lambda_{2/3}} = \text{Kern}(B-2\cdot I_3) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) \underset{-2\text{III}+\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{-\frac{1}{4}\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(c) **(3 Punkte)**
Nach a), b) ist algVFH$(\lambda_{1/2}) = 2 =$dim$(V_{\lambda_{1/2}})$ =geomVFH$(\lambda_{1/2})$, da $\lambda_{1/2}$ doppelte Nullstelle von p_B ist und der zugehörige Eigenraum $V_{\lambda_{1/2}}$ von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Da für jeden Eigenwert 1 $\leq$geomVFH$\leq$algVFH gilt, ist algVFH$(\lambda_3) = 1 =$geomVFH(λ_3). Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte von B überein und B ist somit diagonalisierbar.

(d) **(1 Punkt)**

$$B\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{w}$$

Also ist $\vec{w}$ Eigenvektor zum Eigenwert 2.

(e) **(2 Punkte)**
$7\vec{w}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert 2, da $B(7\vec{w}) = 7\cdot(B\vec{w}) \underset{\text{nach d)}}{=} 7\cdot(2\vec{w}) = 2\cdot(7\vec{w})$.

$$\vec{y}(t) = e^{2(t-0)}\cdot 7\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14e^{2t} \\ 0 \\ 14e^{2t} \end{bmatrix}$$

---

3. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ obere Dreiecksmatrix}\}$, eine Basis von V

$$\mathcal{B} := \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\},$$

sowie die lineare Abbildung $L : V \to V$, von der Folgendes bekannt sei:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie zwei verschiedene Elemente aus Kern(L).
(b) Ist L injektiv/surjektiv/bijektiv?
(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.
(d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von L.

(a) **(4 Punkte)**
Da L eine lineare Abbildung ist, ist $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) - L\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underset{L\text{ lin.}}{=} L\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

Also ist auch $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$.

(b) **(3 Punkte)**
Nach a) ist dim(Kern$(L) \neq 0$, also L nicht injektiv. Aus dem Dimensionssatz folgt, dass $\dim(\text{Bild}(L)) = \underbrace{\dim(V)}_{=3} - \underbrace{\dim(\text{Kern}(L))}_{>0} \leq 2 < 3 = \dim(V)$.
Also ist L auch nicht surjektiv und, da weder injektiv noch surjektiv, auch nicht bijektiv.

(c) **(5 Punkte)**
Spaltenweise Bestimmung von $L_{\mathcal{B}}$:
1. Spalte ist $L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$
$= K_{\mathcal{B}}\left(-1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = -1K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = -\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2. Spalte ist $L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
$= K_{\mathcal{B}}\left(3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
3. Spalte ist $L_{\mathcal{B}}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$
$= K_{\mathcal{B}}\left(-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -2K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) + 3K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
$= -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) **(2 Punkte)**
Die Eigenwerte sind invariant gegenüber Basiswahl. Also sind die Eigenwerte von L die gleichen, wie die von $L_{\mathcal{B}}$. $L_{\mathcal{B}}$ ist eine obere Dreiecksmatrix. Die Eigenwerte stehen also auf der Diagonalen. Somit sind die Eigenwerte von L: -1, 3 und 0.

---

4. Aufgabe

5 Punkte

Gegeben sei der folgende zweidimensionale Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$: $W := \left\{ax^3 + bx - a \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

(a) Wählen Sie aus der Menge $\mathcal{M} := \left\{x^3 + 2x - 1\ ,\ x^2 - 2\ ,\ 0\ ,\ -x^3 + 1\ ,\ 2x - 1\right\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ eine Basis $\mathcal{D}$ von W aus. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine Basis von W ist.

(b) Begründen Sie kurz, warum $\operatorname{span}\left\{x^2 - 2\right\}$ kein Teilraum von W ist.

(a) **(4 Punkte)**
Wähle $\mathcal{D} = \left\{x^3 + 2x - 1, -x^3 + 1\right\}$. Es gilt $\mathcal{D} \subset W$, denn beide Polynome sind aus W (für $a = 1, b = 2$ bzw. $a = 1, b = 0$). Zwei linear unabhängige Polynome bilden eine Basis von W, da $\dim(W) = 2$ nach Aufgabenstellung. Die beiden Polynome in $\mathcal{D}$ sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander, d.h. es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x^3 + 2x - 1 = \alpha(-x^3 + 1)$. Somit ist $\mathcal{D}$ eine Basis von W.

(b) **(1 Punkt)**
$\operatorname{span}\left\{x^2 - 2\right\} \not\subset W$, denn $x^2 - 2 \notin W$, da es keine $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $ax^3 + bx - a = x^2 - 2$. Somit kann $\operatorname{span}\left\{x^2 - 2\right\}$ kein Teilraum von W sein.

---

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} b-a \\ 2a \\ b \end{bmatrix} \end{array}, \quad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \mapsto & cx^2 + x + (a-b) \end{array}, \quad F_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} 2a+b \\ b-c \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift der Komposition $F_3 \circ F_1$.

(b) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(c) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(a) **(3 Punkte)**
$(F_3 \circ F_1)\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = F_3(F_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)) \quad = F_3\left(\begin{bmatrix} b-a \\ 2a \\ b \end{bmatrix}\right)$
$= \begin{bmatrix} 2b \\ 2a-b \end{bmatrix}$

(b) **(5 Punkte)**
Z.z. ist, dass F_1 additiv und homogen ist. Für $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
$F_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (b+d)-(a+c) \\ 2(a+c) \\ b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ 2a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d-c \\ 2c \\ d \end{bmatrix} = F_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) +$
$F_1\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right)$ 2
F_1 ist also additiv.
$F_1\left(\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha b - \alpha a \\ 2\alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} b-a \\ 2a \\ b \end{bmatrix} = \alpha F_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$ 2
F_1 ist also auch homogen.
Da additiv und homogen, ist F_1 linear.

(c) **(2 Punkte)**
$F_2\left(0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x \neq 0 = 0 \cdot x = 0F_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
F_2 ist nicht homogen und somit nicht linear.

---

6. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \rangle = \alpha ac + \beta bd, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, sodass $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.
(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$.

(a) **(4 Punkte)**
Da $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sein soll, gilt
$\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle = \alpha + 4\beta = 1$ und $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle = \alpha - 4\beta = 0$.
Aus der zweiten Gleichung erhählt man: $\alpha - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt: $\alpha + 4\beta = 4\beta + 4\beta = 8\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{8}$ und schließlich $\alpha = 4\beta = 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.
Für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{8}$ ist $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Orthonormalbasis.

(b) **(2 Punkte)**
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}} \underset{\mathrm{ONB}}{=} \begin{bmatrix} \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle \\ \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{10}{8} \\ 1 + \frac{10}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}.$$