

Februar – Klausur
 Lineare Algebra für Ingenieure
 Lösungsskizze Klausurvariante B

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ und $\vec{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

- (a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ auf normierte Zeilenstufenform.
- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.
- (c) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(A)$.
- (d) Bestimmen Sie den Rang von A^T .

(a) (3 Punkte)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{II}+3\text{I}]{\text{III}-2\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{I}-\frac{1}{3}\text{II}]{\frac{1}{3}\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(b) (4 Punkte)

Aus der NZSF(A) folgt, dass x_1, x_3 Kopfvariablen sind. Setze $x_2 := s, x_4 := t \in \mathbb{R}$. Kopfvariablen als Linearkombination von x_2, x_4 darstellen:

$$x_1 = 2x_2 - x_4 = 2s - t \quad \text{und} \quad x_3 = 2 + 2x_4 = 2 + 2t.$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) (2 Punkte)

Die erste und dritte Spalte der NZSF(A) haben Köpfe. Also bilden die erste und dritte Spalte der Ausgangsmatrix A eine Basis von $\text{Bild}(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) (2 Punkte)

Der Spaltenrang ist gleich dem Zeilenrang. Also gilt $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$. Der Rang von A ist 2, da nach a) die NZSF(A) zwei Köpfe hat. Also ist der Rang von A^T ebenfalls 2.

2. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und der Vektor $\vec{w} := \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B .
- (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und den Eigenraum zum größten Eigenwert.
- (c) Ist B diagonalisierbar?
- (d) Zeigen Sie, dass \vec{w} ein Eigenvektor von B ist.
- (e) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = B\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = 5\vec{w}$.

(a) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \cdot I_3) = \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 4 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{Laplace}}{\underset{2. \text{ Zeile}}{=}} (2-\lambda) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (2-\lambda) [(4-\lambda)(-2-\lambda) + 8] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

(b) **(5 Punkte)**

Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $p_B(\lambda)$: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = 2$.
 Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_{2/3}} &= \text{Kern}(B - 2 \cdot I_3) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{III}-2\text{I}}{=} \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \stackrel{\frac{1}{2}\text{I}}{=} \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(c) **(3 Punkte)**

Nach a), b) ist $\text{algVFH}(\lambda_{1/2}) = 2 = \dim(V_{\lambda_{1/2}}) = \text{geomVFH}(\lambda_{1/2})$, da $\lambda_{1/2}$ doppelte Nullstelle von p_B ist und der zugehörige Eigenraum $V_{\lambda_{1/2}}$ von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Da für jeden Eigenwert $1 \leq \text{geomVFH} \leq \text{algVFH}$ gilt, ist $\text{algVFH}(\lambda_3) = 1 = \text{geomVFH}(\lambda_3)$. Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte von B überein und B ist somit diagonalisierbar.

(d) **(1 Punkt)**

$$B\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{w}$$

Also ist \vec{w} Eigenvektor zum Eigenwert 2.

(e) **(2 Punkte)**

$5\vec{w}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert 2, da $B(5\vec{w}) = 5 \cdot (B\vec{w}) \stackrel{\text{nach d)}}{=} 5 \cdot (2\vec{w}) = 2 \cdot (5\vec{w})$.

$$\vec{y}(t) = e^{2(t-0)} \cdot 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15e^{2t} \\ -15e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ obere Dreiecksmatrix}\}$, eine Basis von V

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

sowie die lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$, von der Folgendes bekannt sei:

$$L \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie zwei verschiedene Elemente aus $\text{Kern}(L)$.
- (b) Ist L injektiv/surjektiv/bijektiv?
- (c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis \mathcal{B} .
- (d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von L .

(a) **(4 Punkte)**

Da L eine lineare Abbildung ist, ist $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2L \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + 2L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) - L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &\stackrel{L \text{ lin.}}{=} L \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + 2L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) - L \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = L \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Also ist auch $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$.

(b) **(3 Punkte)**

Nach a) ist $\dim(\text{Kern}(L)) \neq 0$, also L nicht injektiv. Aus dem Dimensionssatz folgt, dass $\dim(\text{Bild}(L)) = \underbrace{\dim(V)}_{=3} - \underbrace{\dim(\text{Kern}(L))}_{>0} \leq 2 < 3 = \dim(V)$.

Also ist L auch nicht surjektiv und, da weder injektiv noch surjektiv, auch nicht bijektiv.

(c) (5 Punkte)

Spaltenweise Bestimmung von $L_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned}
1. \text{ Spalte ist } L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 &= K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= K_{\mathcal{B}}\left(3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
2. \text{ Spalte ist } L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 &= K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= K_{\mathcal{B}}\left(-1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = -1K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = -\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
3. \text{ Spalte ist } L_{\mathcal{B}}\vec{e}_3 &= K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \\
&= K_{\mathcal{B}}\left(3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) - 2K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
L_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(d) (2 Punkte)

Die Eigenwerte sind invariant gegenüber Basiswahl. Also sind die Eigenwerte von L die gleichen, wie die von $L_{\mathcal{B}}$. $L_{\mathcal{B}}$ ist eine obere Dreiecksmatrix. Die Eigenwerte stehen also auf der Diagonalen. Somit sind die Eigenwerte von L : -1 , 3 und 0 .

4. Aufgabe

5 Punkte

Gegeben sei der folgende zweidimensionale Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$: $W := \{ax^3 + bx^2 - a \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Wählen Sie aus der Menge $\mathcal{M} := \{x^3 + 2x^2 - 1, x - 2, 0, -x^3 + 1, 2x^2 - 1\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ eine Basis \mathcal{D} von W aus. Zeigen Sie, dass \mathcal{D} eine Basis von W ist.
- (b) Begründen Sie kurz, warum $\text{span}\{x - 2\}$ kein Teilraum von W ist.

(a) (4 Punkte)

Wähle $\mathcal{D} = \{x^3 + 2x^2 - 1, -x^3 + 1\}$. Es gilt $\mathcal{D} \subset W$, denn beide Polynome sind aus W (für $a = 1, b = 2$ bzw. $a = -1, b = 0$). Zwei linear unabhängige Polynome bilden eine Basis von W , da $\dim(W) = 2$ nach Aufgabenstellung. Die beiden Polynome in \mathcal{D} sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander, d.h. es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x^3 + 2x^2 - 1 = \alpha(-x^3 + 1)$. Somit ist \mathcal{D} eine Basis von W .

(b) (1 Punkt)

$\text{span}\{x - 2\} \not\subset W$, denn $x - 2 \notin W$, da es keine $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $ax^3 + bx^2 - a = x - 2$. Somit kann $\text{span}\{x - 2\}$ kein Teilraum von W sein.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned}
F_1: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & F_2: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x], & F_3: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2. \\
\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} 2a \\ b-a \\ b \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &\mapsto ax^2 + x + (b-c), & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} a+2b \\ a-c \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift der Komposition $F_3 \circ F_1$.
- (b) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.
- (c) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(a) **(3 Punkte)**

$$(F_3 \circ F_1) \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = F_3(F_1 \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)) = F_3 \left(\begin{bmatrix} 2a \\ b-a \end{bmatrix} \right) \\ = \begin{bmatrix} 2b \\ 2a-b \end{bmatrix}$$

(b) **(5 Punkte)**

Z.z. ist, dass F_1 additiv und homogen ist. Für $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_1 \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right) = F_1 \left(\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2(a+c) \\ (b+d) - (a+c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ b-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c \\ d-c \end{bmatrix} = F_1 \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) +$$

$$F_1 \left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right)$$

F_1 ist also additiv.

$$F_1 \left(\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = F_1 \left(\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2\alpha a \\ \alpha b - \alpha a \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2a \\ b-a \end{bmatrix} = \alpha F_1 \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)$$

F_1 ist also auch homogen.

Da additiv und homogen, ist F_1 linear.

(c) **(2 Punkte)**

$$F_2 \left(0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = F_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = x \neq 0 = 0 \cdot x = 0 F_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

F_2 ist nicht homogen und somit nicht linear.

6. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum \mathbb{R}^2 ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\rangle = \alpha ac + \beta bd, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, sodass $\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis \mathcal{B}_{ONB} .

(a) **(4 Punkte)**

Da \mathcal{B}_{ONB} eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sein soll, gilt

$$\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 4\alpha + \beta = 1 \quad \text{und} \quad \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -4\alpha + \beta = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man: $-4\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 4\alpha$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt: $4\alpha + \beta = 4\alpha + 4\alpha = 8\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{8}$ und schließlich $\beta = 4\alpha = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Für $\alpha = \frac{1}{8}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ ist \mathcal{B}_{ONB} bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Orthonormalbasis.

(b) **(2 Punkte)**

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}} \stackrel{\text{ONB}}{=} \begin{bmatrix} \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{8} + 1 \\ \frac{14}{8} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}.$$