Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 11/12

F. Aurzada, L. Knipping, R. Nabben, C. Schröder 02.04.2012

April – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die invertierbare Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A)$.

2. Aufgabe

13 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist B injektiv/surjektiv/bijektiv?

(c) Begründen Sie kurz, warum B diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, sodass $B = SDS^{-1}$ gilt.

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = B\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(7) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $C := \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(C)$ in Abhängigkeit vom Parameter α mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das homogene lineare Gleichungssystem $C\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen hat.

(c) Bestimmen Sie $\det(-2C^T)$ für $\alpha = \frac{1}{4}$.

4. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$: $\mathcal{B}_1 := \left\{x,\ x+1,\ x^2+2x+\frac{1}{3}\right\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ mit $p_1 := x^2,\ p_2 := 3x+1,\ p_3 = x-1$, sowie die folgende lineare Abbildung:

$$L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ ax^2+bx+c & \mapsto & 3ax^2+(-b+3c)x+(b-3c) \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(L)$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.

(c) $\mathcal{B}_2$ ist eine Eigenbasis von L. Bestimmen Sie die zu p_1, p_2 und p_3 zugehörigen Eigenwerte von L.

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\rangle := a_1b_1 + \frac{1}{2}a_2b_2 + a_3b_3$ und mit $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Überführen Sie $\mathcal{C}$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens in eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}$ des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des gegebenen Skalarprodukts $\langle .\,, .\rangle$.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{v} := \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis $\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}$.

6. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien die folgenden beiden Teilmengen des $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$M_1 := \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, \mathrm{Rang}(A) < 2\right\} \text{ und } M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b-a \\ 2b & 0 \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob M_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) M_2 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$. Prüfen Sie, ob $\mathcal{D} := \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von M_2 ist.