Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 11/12
F. Aurzada, L. Knipping, R. Nabben, C. Schröder 02.04.2012

April – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe
8 Punkte

Gegeben seien die invertierbare Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie $\text{Bild}(A)$ und $\text{Kern}(A)$.

(a) **(4 Punkte)**

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II}+2\text{I}]{\text{III}-3\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}+2\text{II}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{I}-\text{III}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}]$$

(b) **(2 Punkte)**

$$A\vec{x} = \vec{b} \underset{\substack{\text{nach a)} \\ \text{A invert.}}}{\Leftrightarrow} A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow I_3\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)**

A nach Aufgabenstellung invertierbar $\Leftrightarrow$ A bijektiv $\Rightarrow$ A surjektiv $\underset{A \text{ lin.}}{\Leftrightarrow}$ $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$

A nach Aufgabenstellung invertierbar $\Leftrightarrow$ A bijektiv $\Rightarrow$ A injektiv $\underset{A \text{ lin.}}{\Leftrightarrow}$ $\text{Kern}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$

---

2. Aufgabe
13 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist B injektiv/surjektiv/bijektiv?

(c) Begründen Sie kurz, warum B diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, sodass $B = SDS^{-1}$ gilt.

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = B\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(7) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) **(5 Punkte)**

B ist eine obere Dreiecksmatrix. Die Eigenwerte stehen also auf der Diagonalen von B:
$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 6.$
zugehörige Eigenräume:

$$V_{\lambda_1} = \text{Kern}(B - \lambda_1 I_2) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \underset{\frac{1}{2}\text{I},\ \text{II}-\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{Kern}(B - \lambda_2 I_2) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{-\frac{1}{2}\text{I}}{=} \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(b) **(3 Punkte)**
Nach a) ist 0 kein Eigenwert von B. Also ist $\mathrm{Kern}(B) = \left\{\vec{0}\right\}$ und B somit injektiv.
Nach dem Dimensionssatz gilt dann
$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 0 + \dim(\mathrm{Bild}(B)) = \dim(\mathrm{Kern}(B)) + \dim(\mathrm{Bild}(B))$,
also $\dim(\mathrm{Bild}(B)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ und B somit auch surjektiv.
B ist auch bijektiv, da injektiv und surjektiv.

(c) **(3 Punkte)**
Nach a) hat B paarweise verschiedene Eigenwerte und ist somit diagonalisierbar.
In S stehen linear unabhängige Eigenvektoren von B und in D passend die Eigenwerte auf der Diagonalen: $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

(d) **(2 Punkte)**
$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\vec{y}_0$ ist also als Linearkombination von Eigenvektoren von B darstellbar.
$\vec{y}(t) = 3e^{4(t-7)}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{6(t-7)}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{4(t-7)} + 2e^{6(t-7)} \\ 2e^{6(t-7)} \end{bmatrix}$

alternativ: Nach c) ist B diagonalisierbar. Mit der Diagonalisierung aus c) ergibt sich:
$\vec{y}(t) = e^{(t-7)B}\vec{y}_0 = Se^{(t-7)D}S^{-1}\vec{y} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4(t-7)} & 0 \\ 0 & e^{6(t-7)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \cdots$
$= \begin{bmatrix} 3e^{4(t-7)} + 2e^{6(t-7)} \\ 2e^{6(t-7)} \end{bmatrix}$

---

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $C := \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(C)$ in Abhängigkeit vom Parameter α mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.
(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das homogene lineare Gleichungssystem $C\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen hat.
(c) Bestimmen Sie $\det(-2C^T)$ für $\alpha = \frac{1}{4}$.

(a) **(4 Punkte)**
$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{nach 3. Sp.}}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\underset{\text{nach 3. Z.}}{=} -2\left(1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -2(2\alpha^2 - 2 + 2 - 4\alpha)\ 2\ = -2(2\alpha^2 - 4\alpha) = -4\alpha^2 + 8\alpha = \alpha(8 - 4\alpha)$$

(b) **(3 Punkte)**
$C\vec{x} = \vec{0}$ hat unendlich viele Lösungen, falls die Zeilen/Spalten von C linear abhängig sind, also $\det(C) = 0$ gilt.
$\det(C) = \alpha(8 - 4\alpha) = 0$ gilt genau dann wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$.
Für alle anderen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\det(C) \neq 0$ und somit $C\vec{x} = \vec{0}$ für diese eindeutig lösbar.

(c) **(3 Punkte)**
$\det(-2C^T) = (-2)^4 \det(C^T) \underset{\det(C^T)=\det(C)}{=} (-2)^4 \det(C)$
$= (-2)^4(\alpha(8 - 4\alpha)) \underset{\alpha=\frac{1}{4}}{=} 16\frac{1}{4}(8 - 1) = 16\frac{7}{4} = 28$

4. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$: $\mathcal{B}_1 := \left\{x,\ x+1,\ x^2+2x+\frac{1}{3}\right\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ mit $p_1 := x^2,\ p_2 := 3x+1,\ p_3 := x-1$, sowie die folgende lineare Abbildung:

$$L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ ax^2+bx+c & \mapsto & 3ax^2+(-b+3c)x+(b-3c) \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von Kern(L).

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.

(c) $\mathcal{B}_2$ ist eine Eigenbasis von L. Bestimmen Sie die zu p_1, p_2 und p_3 zugehörigen Eigenwerte von L.

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

(a) **(3 Punkte)**

Kern$(L) = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid L(p) = 0\}$

$L(ax^2+bx+c) = 3ax^2+(-b+3c)x+(b-3c) = 0$

Koeffizientenvergleich ergibt: $3a = 0$, $-b+3c = 0$ und $b-3c = 0$. Die erste Gleichung ergibt $a = 0$ und aus der zweiten bzw. dritten Gleichung folgt $b = 3c$.

Somit ist Kern$(L) = \{3cx+c \mid c \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{3x+1\}$.

Eine Basis von Kern(L) ist: $\{3x+1\}$.

(b) **(6 Punkte)**

Spaltenweise Bestimmung von $L_{\mathcal{B}_1}$:

$L_{\mathcal{B}_1}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}_1}(L(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}_1}(L(x)) = K_{\mathcal{B}_1}(-x+1) = K_{\mathcal{B}_1}(-2x+(x+1))$

$\underset{K_{\mathcal{B}_1}\text{ lin.}}{=} -2K_{\mathcal{B}_1}(x) + K_{\mathcal{B}_1}(x+1) = -2\vec{e}_1+\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L_{\mathcal{B}_1}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}_1}(L(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}_1}(L(x+1)) = K_{\mathcal{B}_1}(2x-2) = K_{\mathcal{B}_1}(4x-2(x+1))$

$\underset{K_{\mathcal{B}_1}\text{ lin.}}{=} 4K_{\mathcal{B}_1}(x) - 2K_{\mathcal{B}_1}(x+1) = 4\vec{e}_1-2\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L_{\mathcal{B}_1}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}_1}(L(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}_1}(L(x^2+2x+\frac{1}{3})) = K_{\mathcal{B}_1}(3x^2-x+1) = K_{\mathcal{B}_1}(-7(x)+3(x^2+2x+\frac{1}{3}))$

$\underset{K_{\mathcal{B}_1}\text{ lin.}}{=} -7K_{\mathcal{B}_1}(x) + 3K_{\mathcal{B}_1}(x^2+2x+\frac{1}{3}) = -7\vec{e}_1+3\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$L_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) **(3 Punkte)**

$L(p_1) = L(x^2) = 3 \cdot x^2$

$L(p_2) = L(3x+1) = 0 = 0 \cdot (3x+1)$

$L(p_3) = L(x-1) = -4x+4 = -4 \cdot (x-1)$

Also ist 3 der zu p_1 zugehörige Eigenwert, 0 zu p_2 und -4 zu p_3.

(d) **(2 Punkte)**

Da $\mathcal{B}_2$ eine Eigenbasis von L ist, ist die darstellende Matrix von L bzgl. $\mathcal{B}_2$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von L auf der Diagonalen entsprechend der Reihenfolge der Basiselemente.

$L_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

---

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\rangle := a_1b_1 + \frac{1}{2}a_2b_2 + a_3b_3$ und mit $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Überführen Sie $\mathcal{C}$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens in eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}$ des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des gegebenen Skalarprodukts $\langle . , . \rangle$.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{v} := \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis $\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}$.

(a) **(6 Punkte)**

$$\vec{q}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+\frac{1}{2}2^2+1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \underbrace{(1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 2 + 1^2)}_{=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+\frac{1}{2}(-2)^2+1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \underbrace{(0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 1)}_{=4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \underbrace{(0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1)}_{=0} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_3 = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\frac{1}{2}0^2+1^2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) **(2 Punkte)**

$\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}$ ist eine Orthonormalbasis. Für den gesuchten Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}}$ gilt darum:

$$(\vec{v}_{\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}})_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}(3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot 2) + 3 \cdot 1) = 1$$

$$(\vec{v}_{\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}})_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}(3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot (-2) + 3 \cdot 1) = 5$$

$$(\vec{v}_{\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}})_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot 0 + 3 \cdot 1) = 0$$

$$\vec{v}_{\mathcal{C}_{\mathrm{ONB}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

6. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien die folgenden beiden Teilmengen des $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$M_1 := \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, \text{Rang}(A) < 2\right\} \text{ und } M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b-a \\ 2b & 0 \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob M_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) M_2 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$. Prüfen Sie, ob $\mathcal{D} := \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von M_2 ist.

(a) **(3 Punkte)**

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_1$, da jeweils eine linear unabhängige Zeile/Spalte und der Rang der beiden Matrizen 1 und somit kleiner 2 ist.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \notin M_1$, da I_2 zwei linear unabhängige Zeilen/Spalten hat und der Rang somit 2 ist.

M_1 ist kein Teilraum, da nicht abgeschlossen bzgl. Addition.

(b) **(4 Punkte)**

$\mathcal{D}$ ist eine Basis von M_2, falls Erzeugendensystem und linear unabhängig.

span $\mathcal{D} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} -a & a+b \\ 2b & 0 \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b-a \\ 2b & 0 \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} = M_2$

$\mathcal{D}$ ist also ein Erzeugendensystem von M_2, da span $\mathcal{D} = M_2$.

Die beiden Matrizen aus $\mathcal{D}$ sind keine Vielfachen voneinander und somit auch linear unabhängig.

Also ist $\mathcal{D}$ eine Basis von M_2.