Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 12
J. Liesen, R. Nabben, C. Schröder 12.10.2012

Oktober – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$, $\vec{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{x}_p := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von A.

(c) Es gilt $A\vec{x}_p = \vec{b}$. D.h., $\vec{x}_p$ ist eine partikuläre/spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} -2 & \beta & 0 & 3 \\ 4\beta & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit dem Parameter $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(B)$ in Abhängigkeit von β mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von B linear unabhängig?

(c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist 0 ein Eigenwert von B?

3. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien $C := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ Eigenvektoren von C sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Gibt es zusätzlich zu den in a) bestimmten noch weitere Eigenwerte von C? Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von C.

(c) Ist $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ein Eigenvektor von C? Ist $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ ein Eigenvektor von C?

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $C_{\mathcal{B}}$ der Matrixabbildung $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto C\vec{x}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \{\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ des $\mathbb{R}^3$.

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien mit $\mathcal{B}_1 := \{2x + 2, 3x\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{x + 1, x - 2\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, von der die darstellende Matrix bzgl. $\mathcal{B}_1$ bekannt ist: $L_{\mathcal{B}_1} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $L(2x + 2)$.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$.

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Matrizen $Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $R := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ und $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $D := QR$.

(a) Überprüfen Sie, ob Q eine orthogonale Matrix ist.

(b) Q und R sind invertierbar. Bestimmen Sie Q^{-1} und R^{-1}.

(c) Bestimmen Sie $|\det(D^{-1})|$. Berechnen Sie dafür weder D noch D^{-1}.

(d) Stellen Sie $D \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Linearkombination der Spalten von Q dar.

6. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei der folgende Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$: $M := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, 2a + b - c = 0 \right\}$.

(a) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $F : M \to \mathbb{R}^3$ mit $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c \\ 5ab \\ a \end{bmatrix}$ linear ist.

(b) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von M ist.

(c) Geben Sie eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ an, die kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist und begünden Sie Ihre Wahl für N.