Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 12

J. Liesen, R. Nabben, C. Schröder 12.10.2012

Oktober – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$, $\vec{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{x}_p := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von A.

(c) Es gilt $A\vec{x}_p = \vec{b}$. D.h., $\vec{x}_p$ ist eine partikuläre/spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$.

(a) **(3 Punkte)**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\frac{1}{2}\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{NZSF}(A)$$

(b) **(5 Punkte)**

Kern(A) ist die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$. Aus a) folgt, dass x_3 und x_4 Nichtkopfvariablen sind. Setze $x_3 := s \in \mathbb{R}$ und $x_4 := t \in \mathbb{R}$. Für die Kopfvariablen gilt dann $x_1 + 2s - t = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2s + t$ und $x_2 - 2s + 3t = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2s - 3t$. Somit ist

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2s+t \\ 2s-3t \\ s \\ t \end{bmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Eine Basis von Bild(A) bilden die Spalten von A, die in einer ZSF von A Köpfe haben. Nach a) sind dies die ersten beiden Spalten von A.

Also ist $\text{Bild}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(c) **(2 Punkte)**

Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS setzt sich aus einer partikulären Lösung des inhomogenen LGS und den Lösungen des zugehörigen homogenen LGS, also dem Kern, zusammen. Mit der gegebenen partikulären Lösung und b) ist dann

$$\mathcal{L} = \vec{x}_p + \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

---

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} -2 & \beta & 0 & 3 \\ 4\beta & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit dem Parameter $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(B)$ in Abhängigkeit von β mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von B linear unabhängig?

(c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist 0 ein Eigenwert von B?

(a) **(4 Punkte)**

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -2 & \beta & 0 & 3 \\ 4\beta & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{2+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & \beta & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{2. Zeile}}{=}} 3((-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & \beta \\ 2 & -2 \end{vmatrix})$$
$$= 3[(-2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) - (-2 \cdot (-2) - \beta \cdot 2)] = 6\beta - 24$$

(b) **(2 Punkte)**
Die Spalten von B sind linear unabhängig, falls gilt $\det(B) \neq 0$.
$\det(B) = 6\beta - 24 = 0 \Leftrightarrow \beta = 4$
Also sind die Spalten von B linear unabhängig für alle $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

(c) **(2 Punkte)**
0 ist Eigenwert von B, falls $\text{Kern}(B) \neq \{\vec{0}\}$, also die Spalten von B linear abhängig sind.
Nach b) ist dies nur für $\beta = 4$ der Fall.

---

3. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien $C := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ Eigenvektoren von C sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Gibt es zusätzlich zu den in a) bestimmten noch weitere Eigenwerte von C? Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von C.

(c) Ist $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ein Eigenvektor von C? Ist $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ ein Eigenvektor von C?

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $C_{\mathcal{B}}$ der Matrixabbildung $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto C\vec{x}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \{\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ des $\mathbb{R}^3$.

(a) **(3 Punkte)**
$C\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{v}_1$, $C\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \vec{v}_2$, $C\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \cdot \vec{v}_3$
Also ist $\vec{v}_1$ Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert 4.

(b) **(4 Punkte)**
Die algVFH vom Eigenwert 4 ist mindestens zwei, da es nach a) mindestens zwei linear unabhängige Eigenvektoren gibt, denn $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind keine Vielfachen voneinander. Die algVFH vom Eigenwert 1 ist mindestens eins. Da $C \in \mathbb{R}^{3,3}$, ist die Summe der algVFHen drei. Somit können die algVFHen der beiden Eigenwerte 1 und 4 nicht größer sein und C kann keine weiteren Eigenwerte haben: algVFH(1) = 1 und algVFH(4) = 2.
Für die algVFH und die geomVFH eines Eigenwertes gilt allgemein, dass $1 \leq$ geomVFH $\leq$ algVFH. Somit ist geomVFH(1) = 1, da die algVFH(1) = 1. $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind linear unabhängig, da keine Vielfachen voneinander. Somit ist geomVFH(4) = 2, da der zugehörige Eigenraum nach a) von zwei linear unabhängigen Eigenvektoren aufgespannt wird. Mehr als zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 4 kann es nicht geben, da algVFH(4) = 2.

(c) **(2 Punkte)**
$\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ist kein Eigenvektor von C, da nach a) $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind.
$\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ ist ein Eigenvektor von C, da nach a) $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert sind und $\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$.

(d) **(2 Punkte)**
$\mathcal{B}$ ist eine Basis aus Eigenvektoren von C. Die darstellende Matrix bzgl. einer Eigenbasis ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten entsprechend der Reihenfolge der Basisvektoren auf der Hauptdiagonalen: $C_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

---

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien mit $\mathcal{B}_1 := \{2x + 2, 3x\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{x + 1, x - 2\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, von der die darstellende Matrix bzgl. $\mathcal{B}_1$ bekannt ist: $L_{\mathcal{B}_1} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $L(2x+2)$.
(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.
(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$.
(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.

(a) **(3 Punkte)**
$L(2x+2) = K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(L_{\mathcal{B}_1}(K_{\mathcal{B}_1}(2x+2))) = K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(L_{\mathcal{B}_1}(\vec{e}_1)) = K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}) = -2\cdot(3x) = -6x$

(b) **(3 Punkte)**
spaltenweise Bestimmung der Transformationsmatrix:
$S\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e}_1)) = K_{\mathcal{B}_2}(2x+2) = K_{\mathcal{B}_2}(2(x+1)) \underset{\text{lin.}}{=} 2\cdot K_{\mathcal{B}_2}(x+1) = 2\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$S\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e}_2)) = K_{\mathcal{B}_2}(3x) = K_{\mathcal{B}_2}(2(x+1)+(x-2)) \underset{\text{lin.}}{=} 2\cdot K_{\mathcal{B}_2}(x+1) + K_{\mathcal{B}_2}(x-2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
Somit ist $S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) **(3 Punkte)**
T ist die zu S inverse Abbildung. T kann durch invertieren der Matrix S bestimmt werden:
$[S|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I}-2\text{II}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{I}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_2|T]$
Somit ist $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) **(2 Punkte)**
$L_{\mathcal{B}_2} = S\cdot L_{\mathcal{B}_1}\cdot T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

---

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Matrizen $Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $R := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ und $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $D := QR$.

(a) Überprüfen Sie, ob Q eine orthogonale Matrix ist.
(b) Q und R sind invertierbar. Bestimmen Sie Q^{-1} und R^{-1}.
(c) Bestimmen Sie $|\det(D^{-1})|$. Berechnen Sie dafür weder D noch D^{-1}.
(d) Stellen Sie $D\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Linearkombination der Spalten von Q dar.

(a) **(2 Punkte)**
Die quadratische Matrix Q ist orthogonal, falls $QQ^T = I_2$ gilt.
$QQ^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.
Also ist Q eine orthogonale Matrix.

(b) **(2 Punkte)**
Da Q nach a) orthogonal ist, gilt $Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.
$[R|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I+II}]{-\frac{1}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = [I_2|R^{-1}]$ Also ist $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(c) **(3 Punkte)**
$|\det(D^{-1})| = |\det((QR)^{-1})| = |\det(R^{-1}Q^{-1})| = |\det(R^{-1})\det(Q^{-1})| = |\det(R^{-1})|\cdot|\det(Q^{-1})| = |-\frac{1}{2}|\cdot|\pm 1| = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$
(Q^{-1} orthogonal, da Q nach a) orthogonal. Somit ist $\det(Q^{-1}) = \pm 1$.)

(d) **(3 Punkte)** Sei die erste Spalte von Q $\vec{q}_1$ und die zweite Spalte $\vec{q}_2$.
$D\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = QR\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\vec{q}_1 - 2\vec{q}_2$

6. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei der folgende Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$: $M := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, 2a + b - c = 0 \right\}$.

(a) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $F: \; M \to \mathbb{R}^3$ mit $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c \\ 5ab \\ a \end{bmatrix}$ linear ist.

(b) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von M ist.

(c) Geben Sie eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ an, die kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist und begünden Sie Ihre Wahl für N.

(a) **(3 Punkte)**
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M$, da $2 \cdot 1 + 1 - 3 = 0$.

$$2 \cdot F\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 2 \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right) = F\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

F ist nicht homogen und somit nicht linear.

(b) **(5 Punkte)**
Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. $\mathcal{C}$ ist linear unabängig, da die beiden Matrizen in $\mathcal{C}$ keine Vielfache voneinander sind.
$\mathcal{C}$ ist ein Erzeugendensystem von M, falls $\operatorname{span} \mathcal{C} = M$ gilt.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, 2a + b - c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a+b \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (a+b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span} \mathcal{C}.$$

Also ist $\mathcal{C}$ eine Basis von M.

(c) **(2 Punkte)**
$N := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, d = a^2 \right\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in N$, da $1 = 1^2$. Aber $2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin N$, da $2 \neq 4 = 2^2$. N ist also nicht abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation und somit kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.