Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13

L. Knipping, R. Nabben, R. Patterson, M. Scheutzow 04.04.2013

April – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A \,|\, \vec{b}\,]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ keine Lösung besitzt?

2. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und bestimmen Sie den Eigenraum zum größten Eigenwert.

(c) Ist B diagonalisierbar?

(d) Ist B invertierbar?

3. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & ax^2 + x + (a-b) \end{array}, \qquad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ ax + b & \mapsto & \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(F_2)$.

(d) Ist F_2 invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie F_2^{-1}.

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| A \text{ obere Dreiecksmatrix} \right\}$ und die lineare Abbildung $L : V \to V$, von der folgendes bekannt ist:

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ im Kern von L liegt.

(b) Geben Sie einen Eigenwert sowie einen zugehörigen Eigenvektor von L an.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ von V.

5. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei mit $T := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ -2b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

(a) Wählen Sie aus der Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis $\mathcal{C}$ von T aus. Begründen Sie Ihre Wahl.

(b) Ist Ihre in a) gewählte Basis eine Orthonormalbasis von T bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : T \times T \to \mathbb{R} \text{ mit } \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \right\rangle_1 := \frac{1}{16}ad + \frac{1}{2}be + \frac{1}{8}cf\ ?$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\rangle_2 := ac - ad - bc\ .$$

6. Aufgabe

8 Punkte

Geben Sie Matrizen $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, sodass die entsprechenden Bedingungen erfüllt werden. Zeigen Sie, dass die Bedingungen von den von Ihnen gewählten Matrizen erfüllt werden.

(a) Es gilt $C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Kern}(C_1)$.

(b) Es gilt $C_2 \neq 0$ und $C_2^2 = 0$.

(c) Der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ liegt nicht im Bild von C_3.

(d) $\vec{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C_4\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.