Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13
L. Knipping, R. Nabben, R. Patterson, M. Scheutzow 04.04.2013

April – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A\,|\,\vec{b}\,]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Bild}(A)$.

(d) Gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ keine Lösung besitzt?

(a) **(3 Punkte)**

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 6 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II}+3\text{I}]{\text{III}-2\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{4}\text{II}]{\text{I}-\frac{1}{4}\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] = \text{NZSF}([A|\vec{b}])$$

(b) **(3 Punkte)**

Ausgehend von der NZSF in a): Die Nichtkopfvariablen parametrisieren die Lösungsmenge. Setze: $x_2 := s,\ x_4 := t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen: $x_1 - 2s - t = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 + 2s + t$, $x_3 + 4t = 3 \Leftrightarrow x_3 = 3 - 4t$ und $x_5 = -2$. Somit ist die Lösungsmenge des LGS:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+2s+t \\ s \\ 3-4t \\ t \\ -2 \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)**

Eine Basis von $\operatorname{Bild}(A)$ wird durch die Spalten der Matrix A gebildet, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach a) sind dies die erste, dritte und fünfte Spalte von A. Somit ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild}(A)$.

(d) **(2 Punkte)**

Nach c) sind in einer Basis von $\operatorname{Bild}(A)$ drei Vektoren. Somit ist $\dim(\operatorname{Bild}(A)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Also liegt jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ auch im Bild von A und das LGS $A\vec{x} = \vec{v}$ ist immer lösbar. Einen solchen Vektor kann es folglich nicht geben.

---

2. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und bestimmen Sie den Eigenraum zum größten Eigenwert.

(c) Ist B diagonalisierbar?

(d) Ist B invertierbar?

(a) **(3 Punkte)**

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{2+2} \cdot (3-\lambda) \cdot \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 1] = (3-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2) = -\lambda(3-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda$$

(b) **(4 Punkte)** Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen des char. Polynoms. Aus $p_B = -\lambda(3-\lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0$ folgt, dass $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = 3$ die Eigenwerte von B sind.
Für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{2/3}$ gilt:
$$V_{\lambda_{2/3}} = \text{Kern}\left\{B - \lambda_{2/3} \cdot I_3\right\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right\} \underset{\text{II+I}}{\overset{-\text{I}}{=}} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(c) **(3 Punkte)** B ist diagonalisierbar, falls die algVFH gleich der geomVFH für alle Eigenwerte ist. Nach a) bzw. b) ist $\lambda_{2/3}$ eine doppelte Nullstelle des char. Polynoms und die algVFH von $\lambda_{2/3}$ ist somit 2. Die geomVFH von $\lambda_{2/3}$ ist ebenfalls 2, da nach b) der zugehörige Eigenraum von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird, denn $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind keine Vielfachen voneinander. Die algVFH von λ_1 ist 1, denn nach a) bzw. b) ist λ_1 eine einfache Nullstelle des char. Polynoms. Da die geomVFH eines Eigenwerts maximal so groß ist, wie die algVFH, aber mindestens 1, ist auch die geomVFH von λ_1 gleich 1. Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte überein und B ist folglich diagonalisierbar.

(d) **(1 Punkte)** B ist invertierbar, falls bijektiv. Ein Eigenwert von B ist 0. Der zugehörige Eigenraum ist gerade der Kern von B, denn $V_{\lambda_1=0} = \text{Kern}(B - 0 \cdot I_3) = \text{Kern}(B)$. Dieser ist nach c) eindimensional. Somit ist $\text{Kern}(B) \neq \left\{\vec{0}\right\}$ und B also nicht injektiv. Da B nicht injektiv, folglich auch nicht bijektiv ist, ist B nicht invertierbar.

---

3. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:
$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & ax^2 + x + (a-b) \end{array} \quad , \quad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ ax+b & \mapsto & \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix} \end{array} .$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.
(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.
(c) Bestimmen Sie $\text{Kern}(F_2)$.
(d) Ist F_2 invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie F_2^{-1}.

(a) **(2 Punkte)**
$$F_1\left(0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x \neq 0 = 0 \cdot x = 0 \cdot F_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$
F_1 ist nicht homogen und somit auch nicht linear.

(b) **(3 Punkte)** F_2 ist linear, falls additiv und homogen. Für $p := ax+b, q := cx+d \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss also gelten: $F_2(p+q) = F_2(p) + F_2(q)$ und $F_2(\alpha p) = \alpha F_2(p)$.
$$F_2(p+q) = F_2((ax+b)+(cx+d)) = F_2((a+c)x+(b+d)) = \begin{bmatrix} (a+c)+(b+d) \\ 2(a+c)+(b+d) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+d \\ 2c+d \end{bmatrix} = F_2(ax+b) + F_2(cx+d) = F_2(p) + F_2(q)$$
$$F_2(\alpha p) = F_2(\alpha(ax+b)) = F_2(\alpha ax + \alpha b) = \begin{bmatrix} \alpha a + \alpha b \\ 2\alpha a + \alpha b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix} = \alpha F_2(ax+b) = \alpha F_2(q)$$
Also ist F_2 eine lineare Abbildung.

(c) **(2 Punkte)** $\text{Kern}(F_2) = \left\{ax+b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \,\middle|\, F_2(ax+b) = \vec{0}\right\}$
Aus $F_2(ax+b) = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ergibt sich das LGS
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\text{II}]{\text{I+II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$
Das LGS hat die eindeutige Lösung $a = b = 0$.
Somit ist $\text{Kern}(F_2) = \{0x+0\}$.

(d) **(5 Punkte)** Nach c) ist $\text{Kern}(F_2) = \{0\}$. Also ist F_2 injektiv. Nach dem Dimensionssatz gilt nun $\dim(\text{Bild}(F_2)) = \dim(\mathbb{R}_{\leq 1}[x]) - \dim(\text{Kern}(F_2)) = 2 - 0 = 2$. Also ist die Dimension des Bildes gleich der Dimension des Bildraums ($\dim(\mathbb{R}^2) = 2$) und F_2 also auch surjektiv. F_2 injektiv und

surjektiv und somit bijektiv. F_2 ist eine invertierbare Abbildung.
$F_2^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\le 1}[x]$; $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto cx + d$ mit $F_2\left(F_2^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
Aus $F_2\left(F_2^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)\right) = F_2(cx+d) = \begin{bmatrix} c+d \\ 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ergibt sich das LGS
$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b-2a \end{array}\right] \xrightarrow[-\text{II}]{\text{I+II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 2a-b \end{array}\right]$.
Die obige Gleichung hat also die Lösung $c = b - a$ und $d = 2a - b$.
Somit ist $F_2^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = (b-a)x + (2a-b)$.

---

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| A \text{ obere Dreiecksmatrix}\right\}$ und die lineare Abbildung $L: V \to V$, von der folgendes bekannt ist:

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ im Kern von L liegt.

(b) Geben Sie einen Eigenwert sowie einen zugehörigen Eigenvektor von L an.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ von V.

(a) **(2 Punkte)**
$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$, falls $L\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt.

$$L\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(-2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$\overset{\text{lin.}}{=} -2L\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$.

(b) **(2 Punkte)**
$$L\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{nach a)}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
Also ist $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 von L.

(c) **(6 Punkte)**
spaltenweise Bestimmung von $L_\mathcal{B}$:

$$L_\mathcal{B}\vec{e}_1 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_\mathcal{B}\left(L\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$\overset{lin.}{=} K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$L_\mathcal{B}\vec{e}_2 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_\mathcal{B}\left(L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = K_\mathcal{B}\left(2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$\overset{lin.}{=} 2K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + 2K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$L_\mathcal{B}\vec{e}_3 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_\mathcal{B}\left(L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = K_\mathcal{B}\left(3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$\overset{lin.}{=} 3K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$L_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

5. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei mit $T := \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ -2b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

(a) Wählen Sie aus der Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis $\mathcal{C}$ von T aus. Begründen Sie Ihre Wahl.

(b) Ist Ihre in a) gewählte Basis eine Orthonormalbasis von T bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : T \times T \to \mathbb{R} \text{ mit } \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \right\rangle_1 := \frac{1}{16}ad + \frac{1}{2}be + \frac{1}{8}cf \text{ ?}$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\rangle_2 := ac - ad - bc\ .$$

(a) **(4 Punkte)**

Wähle $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Die beiden Vektoren in $\mathcal{C}$ sind linear unabhängig, da keine Vielfachen voneinander. Weiter gilt:

$$\operatorname{span} \mathcal{C} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4t \\ -s \\ 2s \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overset{\substack{s := \frac{1}{4}a \\ t := -b}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ -2b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} = T.$$

Also ist $\mathcal{C}$ auch ein Erzeugendensystem von T und somit eine Basis von T.

(b) **(3 Punkte)**

$\mathcal{C}$ ist orthonormal, falls die einzelnen Vektoren in $\mathcal{C}$ normiert und orthogonal sind. Die beiden Vektoren sind orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, denn es gilt:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_1 = \tfrac{1}{16} \cdot 0 \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 0 + \tfrac{1}{8} \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

Die beiden Vektoren sind auch normiert bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, denn es gilt:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle_1 = \tfrac{1}{16} \cdot 0 \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-1) + \tfrac{1}{8} \cdot 2 \cdot 2 = 1 \text{ und}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_1 = \tfrac{1}{16} \cdot 4 \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + \tfrac{1}{8} \cdot 0 \cdot 0 = 1.$$

$\mathcal{C}$ bildet also eine Orthonormalbasis von T bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

(c) **(2 Punkte)**

$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ ist kein Skalarprodukt, da nicht positiv definit, denn
$\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle_2 = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0$, aber $\vec{e}_2 \neq \vec{0}$.

---

6. Aufgabe

8 Punkte

Geben Sie Matrizen $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, sodass die entsprechenden Bedingungen erfüllt werden. Zeigen Sie, dass die Bedingungen von den von Ihnen gewählten Matrizen erfüllt werden.

(a) Es gilt $C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Kern}(C_1)$.

(b) Es gilt $C_2 \neq 0$ und $C_2^2 = 0$.

(c) Der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ liegt nicht im Bild von C_3.

(d) $\vec{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C_4 \vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) **(2 Punkte)**

$C_1 := \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Offensichtlich gilt $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Da $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ im Kern von C_1.

(b) **(2 Punkte)**
$C_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ und es gilt $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) **(2 Punkte)**
$C_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Das Bild einer Matrix wird durch die Spalten erzeugt. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{Bild}(C_3)$, da $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

(d) **(2 Punkte)**
$C_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist ein Eigenvektor von C_4 zum Eigenwert 1, denn es gilt: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Somit ist also $\vec{y}(t) = e^{1(t-0)}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ die Lösung des Anfangswertproblems.