Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13

G. Bärwolff, R. Nabben, R. Schneider 24.07.2013

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform von A.
(b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern(A).
(c) Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A).
(d) Ist A injektiv/surjektiv/bijektiv?

2. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die zugehörigen Eigenräume.
(b) Ist B diagonalisierbar?
(c) Ist B invertierbar?
(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $C := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.
(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von C linear abhängig?
(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?
(d) Berechnen Sie für $\alpha = 3$ die Determinante von $2C$.

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| A \text{ obere Dreiecksmatrix}\right\}$ mit der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$L : V \to V, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a & -2a \\ 0 & 2a - b + 2c \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.
(b) Prüfen Sie, ob $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von L ist. Falls ja, zu welchem Eigenwert?
(c) Geben Sie die vollständige Abbildungsvorschrift der inversen Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ an.

5. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a+b)x + (a+c)d \qquad , \qquad F_2 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2a - c + d \\ c - d \end{bmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.
(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.
(c) Bestimmen Sie Kern(F_2) und dessen Dimension.
(d) Bestimmen Sie die Dimension von Bild(F_2).

6. Aufgabe

8 Punkte

Gegegen sei $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{4x + 2, 5x - 5\}$ und dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle ax + b, cx + d \rangle_1 = \frac{1}{5}ac + \frac{1}{5}bd.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{ONB}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle ax + b, cx + d \rangle_2 = 2ac - 3ad - 3bc + 2bd$$

kein Skalarprodukt auf V definiert.

(c) Durch $\mathcal{C} = \{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}\} := \left\{ \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts gegeben. Bestimmen Sie für $\vec{v} = -7\vec{e}_1$ den Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{C}}$.