

**Juli – Klausur**  
**Lineare Algebra für Ingenieure**  
**Lösungsskizze**

**1. Aufgabe**

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix  $A := \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ .

- Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform von  $A$ .
- Bestimmen Sie eine Basis von  $\text{Kern}(A)$ .
- Bestimmen Sie eine Basis von  $\text{Bild}(A)$ .
- Ist  $A$  injektiv/surjektiv/bijektiv?

(a) **(3 Punkte)**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 3\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{I} + \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{NZSF}(A)$$

(b) **(2 Punkte)**

Ausgehend von der NZSF in a): Die Kopfvariablen sind  $x_1, x_3, x_5$ , die Nichtkopfvariablen  $x_2, x_4$  parametrisieren die Lösungsmenge. Setze:  $x_2 := s, x_4 := t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für die Kopfvariablen:  $x_1 = 2s - t, x_3 = -3t$  und  $x_5 = 0$ . Somit ist eine Basis von  $\text{Kern}(A)$  gegeben durch:

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) **(2 Punkte)**

Eine Basis von  $\text{Bild}(A)$  wird durch die Spalten der Matrix  $A$  gebildet, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach a) sind dies die erste, dritte und fünfte Spalte von  $A$ . Somit ist  $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  eine Basis von  $\text{Bild}(A)$ .

(d) **(3 Punkte)**

Nach c) sind in einer Basis von  $\text{Bild}(A)$  drei Vektoren. Somit ist  $\dim(\text{Bild}(A)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ . Also ist  $A$  surjektiv.  
 Ebenfalls nach c) ist  $\dim(\text{Kern}(A)) = 2 > 0$ . Somit ist  $A$  nicht injektiv.  
 Da  $A$  nicht injektiv ist, ist  $A$  auch nicht bijektiv.

**2. Aufgabe**

11 Punkte

Gegeben sei die Matrix  $B := \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ .

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $B$  sowie die zugehörigen Eigenräume.
- Ist  $B$  diagonalisierbar?
- Ist  $B$  invertierbar?
- Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems  $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) **(6 Punkte)** Da  $B$  eine obere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Es folgt, dass  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_{2/3} = 4$  die Eigenwerte von  $B$  sind.

Für den Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_1$  gilt:

$$V_{\lambda_1} = \text{Kern}\{B\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right\} \stackrel{\frac{1}{4}I, \text{III}-4\text{II}}{=} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Für den Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_{2/3}$  gilt:

$$V_{\lambda_{2/3}} = \text{Kern}\{B - \lambda_{2/3} \cdot I_3\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \stackrel{\text{II}+I, \frac{1}{4}I}{=} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

- (b) **(2 Punkte)**  $B$  ist diagonalisierbar, falls für alle Eigenwerte die algVFH gleich der geomVFH ist. Nach a) ist die algVFH von  $\lambda_{2/3}$  2, die geomVFH von  $\lambda_{2/3}$  ist jedoch nur 1, da der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.  $B$  ist folglich nicht diagonalisierbar.

- (c) **(1 Punkte)**  $B$  ist invertierbar, falls bijektiv. Ein Eigenwert von  $B$  ist 0. Der zugehörige Eigenraum ist gerade der Kern von  $B$ , denn  $V_{\lambda_1=0} = \text{Kern}(B - 0 \cdot I_3) = \text{Kern}(B)$ . Dieser ist nach a) eindimensional. Somit ist  $\text{Kern}(B) \neq \{\vec{0}\}$  und  $B$  also nicht injektiv. Da  $B$  nicht injektiv, folglich auch nicht bijektiv ist, ist  $B$  nicht invertierbar.

- (d) **(2 Punkte)** Lösung des AWP mit der Eigenwertmethode. Wir stellen  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  als Linearkombination von Eigenvektoren dar:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Als Lösung des AWP folgt:  $y(t) = e^{0 \cdot (t-2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{4 \cdot (t-2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{4 \cdot (t-2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2e^{4 \cdot (t-2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

### 3. Aufgabe

10 Punkte

Für den Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  sei  $C := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$

- (a) Berechnen Sie die Determinante von  $C$  mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.  
 (b) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  sind die Spalten von  $C$  linear abhängig?  
 (c) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $C$  invertierbar?  
 (d) Berechnen Sie für  $\alpha = 3$  die Determinante von  $2C$ .

- (a) **(4 Punkte)**

$$\det(C) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{2 \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 8 & -\alpha \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der ersten Spalte}}$$

$$= \underbrace{2 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 8 & -\alpha \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right) + 2 \cdot (-1) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der zweiten Zeile}} = 2(-8 + 4\alpha) + 0 = 8\alpha - 16.$$

- (b) **(2 Punkte)** Die Spalten von  $C$  sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante von  $C$  0 beträgt, also genau dann, wenn  $\alpha = 2$ .  
 (c) **(2 Punkte)**  $C$  ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von 0 verschieden ist, also für alle  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 2$ .  
 (d) **(2 Punkte)** Nach a) ist für  $\alpha = 3$  ist  $\det(C) = 8$ . Somit ist  $\det(2C) = 2^4 \det(C) = 16 \cdot 8 = 128$ .

**4. Aufgabe**

10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum  $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ obere Dreiecksmatrix}\}$  mit der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$L : V \rightarrow V, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a & -2a \\ 0 & 2a - b + 2c \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von  $L$  bzgl. der Basis  $\mathcal{B}$ .  
 (b) Prüfen Sie, ob  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ein Eigenvektor von  $L$  ist. Falls ja, zu welchem Eigenwert?  
 (c) Geben Sie die vollständige Abbildungsvorschrift der inversen Koordinatenabbildung  $K_{\mathcal{B}}^{-1}$  an.

- (a) **(6 Punkte)** spaltenweise Bestimmung von  $L_{\mathcal{B}}$ :

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}\left(2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} 2K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}\left(3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} 3K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) - 1K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + K_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (b) **(2 Punkte)**

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ein Eigenvektor von  $L$  zum Eigenwert  $-1$ .

- (c) **(2 Punkte)**

$$K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow V, \quad K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b-c & 2b \\ 0 & a+b+2c \end{bmatrix}$$

**5. Aufgabe**

11 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad F_2 : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a+b)x + (a+c)d, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2a-c+d \\ c-d \end{bmatrix}.$$

- (a) Überprüfen Sie, ob  $F_1$  eine lineare Abbildung ist.  
 (b) Überprüfen Sie, ob  $F_2$  eine lineare Abbildung ist.  
 (c) Bestimmen Sie  $\text{Kern}(F_2)$  und dessen Dimension.  
 (d) Bestimmen Sie die Dimension von  $\text{Bild}(F_2)$ .

- (a) **(2 Punkte)**

$$2 \cdot F_1\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \neq 4 = 2 \cdot 2 = F_1\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = F_1\left(2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$F_1$  ist nicht homogen und somit auch nicht linear.

- (b) **(3 Punkte)**  $F_2$  ist linear, falls additiv und homogen. Für  $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  muss also gelten:  $F_2(A_1 + A_2) = F_2(A_1) + F_2(A_2)$  und  $F_2(\alpha A_1) = \alpha F_2(A_1)$ .
- $$F_2(A_1 + A_2) = F_2\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(a_1 + a_2) - (c_1 + c_2) + d_1 + d_2 \\ (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) \end{bmatrix}$$
- $$= \begin{bmatrix} (2a_1 - c_1 + d_1) + (2a_2 - c_2 + d_2) \\ (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 - c_1 + d_1 \\ c_1 - d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_2 - c_2 + d_2 \\ c_2 - d_2 \end{bmatrix} = F_2(A_1) + F_2(A_2)$$
- $$F_2(\alpha A_1) = F_2\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\alpha a_1 - \alpha c_1 + \alpha d_1 \\ \alpha c_1 - \alpha d_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2a_1 - c_1 + d_1 \\ c_1 - d_1 \end{bmatrix} = \alpha F_2(A_1)$$
- Also ist  $F_2$  eine lineare Abbildung.
- (c) **(4 Punkte)**  $\text{Kern}(F_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}[x] \mid F_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \vec{0} \right\}$
- Aus  $F_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a - c + d \\ c - d \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ergibt sich das LGS
- $$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{I+II} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}I} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right].$$
- Es folgt  $a = 0, c = d, b$  beliebig wählbar.
- Somit ist  $\text{Kern}(F_2) = \left\{ b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$ .
- Da  $\text{Kern}(F_2)$  von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird, beträgt die Dimension des Kerns 2.
- (d) **(2 Punkte)** Nach c) ist  $\text{Kern}(F_2)$  zweidimensional. Nach dem Dimensionssatz gilt nun  $\dim(\text{Bild}(F_2)) = \dim(\mathbb{R}^{2,2}) - \dim(\text{Kern}(F_2)) = 4 - 2 = 2$ . Also ist die Dimension des Bildes gleich 2.

## 6. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei  $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{4x + 2, 5x - 5\}$  und dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle ax + b, cx + d \rangle_1 = \frac{1}{5}ac + \frac{1}{5}bd.$$

- (a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_{ONB}$  bezüglich des Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ .
- (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle ax + b, cx + d \rangle_2 = 2ac - 3ad - 3bc + 2bd$$

kein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

- (c) Durch  $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\} := \left\{ \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$  ist eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$  bezüglich des Standardskalarprodukts gegeben. Bestimmen Sie für  $\vec{v} = -7\vec{e}_1$  den Koordinatenvektor  $\vec{v}_{\mathcal{C}}$ .

- (a) **(4 Punkte)**

$$q_1 = \frac{4x+2}{\|4x+2\|_1} = \frac{4x+2}{\sqrt{\frac{1}{5}4^2 + \frac{1}{5}2^2}} = \frac{4x+2}{2} = 2x + 1$$

$$l_2 = (5x - 5) - \underbrace{\langle 5x - 5, 2x + 1 \rangle_1}_{\frac{1}{5} \cdot 5 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot (-5) \cdot 1 = 1} (2x + 1) = (5x - 5) - (2x + 1) = 3x - 6$$

$$q_2 = \frac{3x-6}{\|3x-6\|_1} = \frac{3x-6}{\sqrt{\frac{1}{5}3^2 + \frac{1}{5}(-6)^2}} = \frac{3x-6}{3} = x - 2$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert somit  $\mathcal{B}_{ONB} = \{q_1, q_2\} = \{2x + 1, x - 2\}$ .

- (b) **(2 Punkte)**

Die positive Definitheit ist verletzt, z.B. ist  $\langle x + 1, x + 1 \rangle_2 = 2 - 3 - 3 + 2 = -2 < 0$ .

- (c) **(2 Punkte)**

Bei einer ONB lassen sich die Koordinaten mit Hilfe der Skalarprodukte mit den Basisvektoren bestimmen.

$$\vec{v}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \langle \vec{v}, \vec{c}_1 \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{c}_2 \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{c}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$