Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
M. Eigel, R. Nabben, K. Roegner, M. Wojtylak

WS 13/14
26.02.2014

Februar – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

13 Punkte

Gegeben sei die reelle Matrix $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $\begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ \alpha \end{bmatrix} \in \text{Bild}(A)$ ist.

(b) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform von A.

(c) A definiert eine Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; \vec{x} \mapsto A\vec{x}$. Bestimmen Sie m und n.

(d) Bestimmen Sie Kern(A) und eine Basis von Bild(A).

(e) Ist die Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ injektiv/surjektiv/bijektiv?

(a) **(2 Punkte)**
$\begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ \alpha \end{bmatrix} \in \text{Bild}(A)$, falls $\begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ \alpha \end{bmatrix}$ eine Linearkombination der Spalten von A ist. Für $\alpha = -4$ ist $\begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (vierte Spalte von A). Also ist $\begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} \in \text{Bild}(A)$.

(b) **(3 Punkte)**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III}-2\text{I}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{NZSF}(A)$$

(c) **(1 Punkt)**
Aus der Anzahl der Zeilen und Spalten von A (bzw. aus der Matrixmultiplikation) folgt $m = 4$ und $n = 3$.

(d) **(4 Punkte)**
Aus der NZSF(A) folgt, dass x_2, x_3 Kopfvariablen sind. Kopfvariablen als Linearkombination der Nichtkopfvariablen (x_1, x_4) darstellen: $x_2 = 3x_4$ und $x_3 = -2x_4$.

$$\text{1. Basisvektor (setze } x_1 = 1, x_4 = 0\text{): } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{2. Basisvektor (setze } x_1 = 0, x_4 = 1\text{): } \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kern}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Da in der zweiten und dritten Spalte der NZSF(A) die Köpfe stehen, bilden die zweite und dritte Spalte von A eine Basis von Bild(A).

$$\text{Basis(Bild}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

(e) **(3 Punkte)**
A ist nicht injektiv, da nach (d) $\dim(\text{Kern}(A)) = 2 \neq 0$ (bzw. Kern$(A) \neq \{0\}$).
A ist auch nicht surjektiv, da $\dim(\text{Bild}(A)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. A ist demzufolge auch nicht bijektiv, da weder injektiv noch surjektiv.

2. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} -7 & 0 & 8 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und den Eigenraum zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert.

(c) Ist B diagonalisierbar?

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = B\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(e) Ist $\mathrm{Kern}(B) = \{\vec{0}\}$?

(a) **(3 Punkte)**

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} -7 & 0 & 8 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -7-\lambda & 0 & 8 \\ -4 & 1-\lambda & 4 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right) \underset{\text{2. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (1-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -7-\lambda & 8 \\ -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-\lambda)\left[(-7-\lambda)(5-\lambda) + 32\right]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = -(3+\lambda)(1-\lambda)^2 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3$$

(b) **(5 Punkte)**

Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $p_B(\lambda)$: $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_{2/3} = 1$.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist:

$$V_{\lambda_{2/3}} = \mathrm{Kern}(B - 1 \cdot I_3) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -8 & 0 & 8 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \underset{-\frac{1}{8}\mathrm{I}}{=} \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \underset{\mathrm{III}+4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+4\mathrm{I}}{=}} \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(c) **(3 Punkte)**

Nach (b) ist $\mathrm{algVFH}(\lambda_{2/3}) = 2 = \dim(V_{\lambda_{2/3}}) = \mathrm{geomVFH}(\lambda_{2/3})$, da $\lambda_{2/3}$ doppelte Nullstelle von p_B ist und der zugehörige Eigenraum $V_{\lambda_{2/3}}$ von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Da für jeden Eigenwert $1 \leq \mathrm{geomVFH} \leq \mathrm{algVFH}$ gilt, ist $\mathrm{algVFH}(\lambda_1) = 1 = \mathrm{geomVFH}(\lambda_1)$. Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte von B überein und B ist somit diagonalisierbar.

(d) **(2 Punkte)**

Lösung des AWPs mit der Eigenwertmethode. Wir stellen $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar: $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{y}_0$.

Als Lösung des AWPs folgt: $y(t) = -2e^{1(t-2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t-2} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(e) **(1 Punkt)**

Ja, da 0 kein Eigenwert von B ist.

3. Aufgabe

13 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_2 \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$ sowie zwei Basen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ von V:

$$\mathcal{B}_1 := \left\{\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad \mathcal{B}_2 := \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Weiterhin sei $L_{\mathcal{B}_2}$ die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : V \to V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$:

$$L_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ mithilfe von $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$.

(c) Ist L invertierbar?

(a) **(4 Punkte)**
Es gilt $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$.

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}(\vec{e_1}) &= K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e_1})) = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}_2}\left(-2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) \\
&= -2K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = -2\vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{(1. Spalte von } S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\text{)} \\
S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}(\vec{e_2}) &= K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e_2})) = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) \\
&= K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) - K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \vec{e_2} - \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{(2. Spalte von } S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\text{)} \\
S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}(\vec{e_3}) &= K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\vec{e_3})) = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) - K_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(3. Spalte von } S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\text{)}
\end{aligned}$$

Somit ist

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) **(6 Punkte)**
Es gilt

$$L_{\mathcal{B}_1} = S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}^{-1} \circ L_{\mathcal{B}_2} \circ S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}.$$

Weiterhin ist

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I\leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[II+III]{I+II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}I]{I+III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ Also } S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) **(3 Punkte)**
Die Determinante einer linearen Abbildung ist gegeben durch die Determinante einer ihrer darstellenden Matrizen. Also ist $\det(L) = \det(L_{\mathcal{B}_2}) = -2 \neq 0$. Also ist L invertierbar.

---

4. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} 2a-b \\ 0 \\ 3b \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \mapsto & ax^2 - 2bcx \end{array} \quad .$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(c) Ist die Komposition $F_1 \circ F_2$ definiert?

(a) **(3 Punkte)** F_1 ist linear, falls F_1 additiv und homogen ist. Für $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(a_1+a_2) - (b_1+b_2) \\ 0 \\ 3(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2a_1 - b_1 \\ 0 \\ 3b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_2 - b_2 \\ 0 \\ 3b_2 \end{bmatrix} = F_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) + F_1\left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)$$

F_1 ist also additiv.

$$F_1\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) = F_1\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha b_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(\alpha a_1) - (\alpha b_1) \\ 0 \\ 3(\alpha b_1) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2a_1 - b_1 \\ 0 \\ 3b_1 \end{bmatrix} = \alpha F_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right).$$

F_1 ist also auch homogen und folglich linear.

(b) **(2 Punkte)**

$$F_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + F_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2F_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -4x \neq -8x = F_2\left(2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

F_2 ist also weder additiv noch homogen und somit nicht linear.

(c) **(1 Punkt)** Nein, da der Bildraum von F_2 $(= \mathbb{R}_{\leq 2}[x])$ nicht im Urbildraum von F_1 $(= \mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

---

5. Aufgabe

6 Punkte

Bestimmen Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ eine orthogonale Matrix, so ist $\det(A) = 0$.

(b) Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Matrix $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ zum Eigenwert 2, so ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Matrix B^3 zum Eigenwert 8.

(c) Ist $C \in \mathbb{R}^{2,2}$ diagonalisierbar, so ist C invertierbar.

(d) Eine lineare Abbildung $D : U \to W$ mit $\dim(U) = 3$ und $\dim(W) = 2$ kann nicht injektiv sein.

(a) **(1 Punkt)**
Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachte man $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dann ist $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, also ist A orthogonal und $\det(A) = 1$.
Alternativ: Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ ist invertierbar mit $A^{-1} = A^T$, also ist $\det(A) \neq 0$.

(b) **(2 Punkte)**
Die Aussage ist wahr. Da $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Matrix B zum Eigenwert 2 ist, gilt $B\vec{v} = 2\vec{v}$. Also gilt auch

$$B^3\vec{v} = B^2(B\vec{v}) = B^2(2\vec{v}) = B(B(2\vec{v})) = B(2B\vec{v}) = B(4\vec{v}) = 4B\vec{v} = 8\vec{v}.$$

(c) **(1 Punkt)**
Die Aussage ist falsch. Betrachte $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. C ist bereits diagonal, aber C ist nicht invertierbar ($\det(C) = 0$).

(d) **(2 Punkte)**
Die Aussage ist wahr. Falls D injektiv wäre, müsste $\dim(\mathrm{Kern}(D)) = 0$ gelten. Dann folgt aus dem Dimensionssatz $\dim(U) = 3 = \dim(\mathrm{Kern}(D)) + \dim(\mathrm{Bild}(D)) = 0 + \dim(\mathrm{Bild}(D)) \leq \dim(W) = 2$. Widerspruch!

6. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle ax^2 + bx + c, dx^2 + ex + f \right\rangle = ad + \frac{1}{2}be + cf$$

und mit $\mathcal{B} := \left\{ q_1 := \sqrt{2}x, q_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, p_3 := x^2 + x + 1 \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ orthonormiert (d.h. orthogonal und normiert) bzgl. des gegebenen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

(b) Überführen Sie $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_3\}$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bzgl. des gegebenen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $p = -x^2 + 2x + 1$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$.

(a) **(3 Punkte)**

Zu zeigen: $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, 2$.

$$\langle q_1, q_1 \rangle = \left\langle \sqrt{2}x, \sqrt{2}x \right\rangle = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot 0 = 1$$

$$\langle q_2, q_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$\langle q_2, q_1 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle = \left\langle \sqrt{2}x, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

(b) **(3 Punkte)**

In (a) wurde bereits gezeigt, dass $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ orthonormiert sind.

$$l_3 = x^2 + x + 1 - \left\langle x^2 + x + 1, \sqrt{2}x \right\rangle \sqrt{2}x - \left\langle x^2 + x + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= x^2 + x + 1 - 2 \left\langle x^2 + x + 1, x \right\rangle x - \frac{1}{2} \left\langle x^2 + x + 1, x^2 - 1 \right\rangle (x^2 - 1)$$

$$= x^2 + x + 1 - 2 \left(1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \right) x - \frac{1}{2} \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \right) (x^2 - 1)$$

$$= x^2 + x + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(x^2 - 1\right) = x^2 + 1$$

$$q_3 = \frac{x^2 + 1}{\|x^2 + 1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1}} \left(x^2 + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \{q_1\ , q_2\ , q_3\} = \left\{ \sqrt{2}x, \tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)**

Für den gesuchten Koordinatenvektor $\vec{p}_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}}$ gilt:

$$(\vec{p}_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}})_1 = \left\langle -x^2 + 2x + 1, \sqrt{2}x \right\rangle = (-1) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 0 = \sqrt{2}$$

$$(\vec{p}_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}})_2 = \left\langle -x^2 + 2x + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$(\vec{p}_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}})_3 = \left\langle -x^2 + 2x + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\vec{p}_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$