Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 13/14

M. Eigel, R. Nabben, K. Roegner, M. Wojtylak 02.04.2014

April – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien die invertierbare Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie Bild(A) und eine Basis von Kern(A).

(a) **(4 Punkte)**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{II}-4\text{III}]{\text{I}-\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(b) **(2 Punkte)**

$$A\vec{x} = \vec{b} \underset{A \text{ inv.}}{\Leftrightarrow} A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) **(3 Punkte)**

Da A invertierbar ist, gilt Bild(A) $= \mathbb{R}^3$ und Kern(A) $= \left\{\vec{0}\right\}$. Also ist Basis(Kern(A)) $= \emptyset$.

---

2. Aufgabe

10 Punkte

Sei $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine reelle Matrix mit den Eigenwerten $-1, 3, 3$ und seien

$$V_{\lambda=-1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda=3} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

die zugehörigen Eigenräume.

(a) Ist B invertierbar?

(b) Ist B diagonalisierbar?

(c) Gibt es einen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{c}$ unendlich viele Lösungen besitzt?

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = B\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(-3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(e) Ist $\det\left(-\frac{1}{3}BB^T\right) = 0$?

(a) **(1 Punkt)**

Ja, da 0 kein Eigenwert von B ist.

(b) **(2 Punkte)**

Damit B diagonalisierbar ist, muss folgendes gelten: algVFH = geomVFH für alle Eigenwerte von B. Nach Voraussetzung ist 3 ein Eigenwert von B mit algVFH$(\lambda = 3) = 2 \neq 1 =$ geomVFH$(\lambda = 3)$. Also ist B nicht diagonalisierbar.

(c) **(2 Punkte)**

Nein, da B nach (a) invertierbar ist, d.h. NZSF$(B) = I_3$. Somit gibt es für jeden Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ genau eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $B\vec{x} = \vec{c}$.

(d) **(2 Punkte)**
Lösung des AWPs mit der Eigenwertmethode. Wir stellen $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren von B dar: $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{y}_0$.
Als Lösung des AWPs folgt: $y(t) = e^{(-1)\cdot(t+3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{3(t+3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-1)\cdot(t+3)} - e^{3(t+3)} \\ -e^{3(t+3)} \\ e^{(-1)\cdot(t+3)} \end{bmatrix}$.

(e) **(3 Punkte)**
Nein, da nach (a) B invertierbar ist, d.h. $\det(B) \neq 0$. Außerdem gilt $\det(B) = \det\left(B^T\right) \neq 0$ und

$$\det\left(-\frac{1}{3}BB^T\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \det(B) \cdot \det\left(B^T\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \det(B)^2 \neq 0.$$

---

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, die Basis $\mathcal{C} := \left\{3, x-1, x^2 - x + 2\right\}$ des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ sowie die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit

$$F(3) = 2x^2 + 4, \quad F(x-1) = -x^2 - 2, \quad F(x^2 - x + 2) = -2x^2 + 2x - 4.$$

(a) Bestimmen Sie zwei Elemente in $\mathrm{Kern}(F)$.
(b) Bestimmen Sie zwei Eigenwerte von F und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor.
(c) Ist die darstellende Matrix $F_{\mathcal{C}}$ von F bzgl. der Basis $\mathcal{C}$ surjektiv?

(a) **(4 Punkte)**
Da F eine lineare Abbildung ist, ist $0x^2 + 0x + 0 = 0 \in \mathrm{Kern}(F)$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 + 4 + 2(-x^2 - 2) \\ &= F(3) + 2 \cdot F(x-1) \\ &= F(3 + 2(x-1)) \\ &= F(2x+1) \end{aligned}$$

Also liegt auch $2x+1$ im Kern von F.

(b) **(4 Punkte)**
Da $2x+1$ im Kern von F liegt, gilt $F(2x+1) = 0 \cdot (2x+1)$, d.h. 0 ist ein Eigenwert von F mit Eigenvektor $2x+1$. Außerdem ist laut Aufgabenstellung $F\left(x^2 - x + 2\right) = -2 \cdot (x^2 - x + 2)$, d.h. -2 ist ein Eigenwert von F mit Eigenvektor $x^2 - x + 2$.

(c) **(2 Punkte)**
Nein, da nach (b) (bzw. (a)) 0 ein Eigenwert von F ist. Also ist F nicht injektiv und der Dimensionssatz liefert $\dim(\mathrm{Bild}(F)) \leq 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x])$, also ist F auch nicht surjektiv. Somit ist auch jede darstellende Matrix von F nicht surjektiv, insbesondere also $F_{\mathcal{C}}$.

---

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien der drei-dimensionale Vektorraum $V := \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, die Menge $\mathcal{B}_1 := \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ und die lineare Abbildung $L : V \to V; A \mapsto A$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ eine Basis von V ist.
(b) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von V bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ von V.
(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$.
(d) Sei $\mathcal{B}_2$ eine weitere Basis von V. Bestimmen Sie den Urbildraum und Bildraum der als Matrixabbildung aufgefassten Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$.

(a) **(5 Punkte)**
Es gilt

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \in V,$$

also ist $\mathcal{B}_1 \subset V$. Da $\mathcal{B}_1$ drei Elemente enthält und V drei-dimensional ist, reicht es zu zeigen, dass die Vektoren in $\mathcal{B}_1$ linear unabhängig sind. Dies führt auf das LGS

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3\\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Nun bringen wir die KM auf NZSF:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{II}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{III}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Das homogene LGS hat damit genau die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, sodass die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind. Also ist $\mathcal{B}_1$ eine Basis von V.

(b) **(3 Punkte)**

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3\\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & c\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & a\\ -2 & 2 & -2 & b\\ 1 & 0 & 1 & c\end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 2 & -2 & b+2a\\ 0 & 0 & 1 & c-a\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1 & \frac{b+2a}{2}\\ 0 & 0 & 1 & c-a\end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}+\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{2}+c\\ 0 & 0 & 1 & c-a\end{array}\right].$$

$$\begin{array}{cccc} K_{\mathcal{B}_1}: & V & \to & \mathbb{R}^3\\ & \begin{bmatrix}a & b\\ c & c\end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix}a\\ \frac{b}{2}+c\\ c-a\end{bmatrix}. \end{array}$$

(c) **(2 Punkte)**
Es gilt $L_{\mathcal{B}_1} = K_{\mathcal{B}_1} \circ L \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$. Da L die identische Abbildung ist, folgt sofort $L_{\mathcal{B}_1} = K_{\mathcal{B}_1} \circ L \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = K_{\mathcal{B}_1} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = I$. Also ist

$$L_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(d) **(2 Punkte)**
$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, da $\dim(V) = 3$, also sind der Urbildraum und der Bildraum gleich $\mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und eine Basis $\mathcal{B} := \left\{ \vec{v}_1 := \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$.

(a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B}$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ zu überführen.

(b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Bild}(C))$.

(a) **(5 Punkte)**

Normieren von $\vec{v}_1$:

Es ist $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} = \sqrt{2}$, also ist $\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lot fällen auf $\vec{v}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Normieren von $\vec{l}_2$:

Es ist $\|\vec{l}_2\| = \sqrt{\langle \vec{l}_2, \vec{l}_2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, also ist $\vec{q}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Lot fällen auf v_3:

$$\begin{aligned} \vec{l}_3 &= \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Normieren von $\vec{l}_3$:

Es ist $\|\vec{l}_3\| = \sqrt{\langle \vec{l}_3, \vec{l}_3 \rangle} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, also ist $\vec{q}_3 = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Antwort:

Also ist $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) **(3 Punkte)**

Da die Spalten von B die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind, ergibt sich die Matrix $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. Für die obere Dreiecksmatrix erhalten wir

$$R = Q^T \cdot C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

(c) **(1 Punkt)**

Da $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, muss C invertierbar sein und somit ist $\dim(\mathrm{Bild}(C)) = 3$.

6. Aufgabe

10 Punkte

(a) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $G : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{2,2}; ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-1 \end{bmatrix}$ linear ist.

(b) (i) Überprüfen Sie, ob $M_1 := \left\{D \in \mathbb{R}^{2,2} \mid 1 \text{ und } 2 \text{ sind Eigenwerte von } D\right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(ii) Überprüfen Sie, ob $M_2 := \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid 2a - b = 3c\right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ist.

(a) **(2 Punkte)**

Es gilt $G(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Somit ist G nicht linear, da das Nullelement einer linearen Abbildung immer auf das Nullelement abbildet.

Alternativ: Es gilt

$$G\left(2x^2\right) = G\left(x^2 + x^2\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = G\left(x^2\right) + G\left(x^2\right) = 2G\left(x^2\right).$$

G ist also weder additiv noch homogen und somit nicht linear.

(b) **(8 Punkte)**

(i) **(3 Punkte)**

M_1 ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$. Betrachte folgendes Gegenbeispiel. Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_1,$$

da bei oberen Dreiecksmatrizen die Eigenwerte auf der Diagonalen liegen, also jeweils 1 und 2. Jedoch besitzt

$$2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

die Eigenwerte 2 und 4 (insbesondere sind weder 1 noch 2 Eigenwerte). Also ist M_1 weder abgeschlossen bzgl. der Addition noch abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation und somit kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

Alternativ: In jedem Teilraum muss das Nullelement (Nullvektor) enthalten sein. Die Nullmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ besitzt aber den doppelten Eigenwert 0 und liegt somit nicht in M_1.

(ii) **(5 Punkte)**

Um zu zeigen, dass M_2 ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ist, überprüfen wir die drei Teilraumeigenschaften.

- **M_2 ist nichtleer**:
  Es gilt $2 \cdot 0 - 0 = 3 \cdot 0$, also ist $0x^2 + 0x + 0 \in M_2$, d.h. $M_2 \neq \emptyset$.
- **M_2 ist abgeschlossen bzgl. der Addition**:
  Seien $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \in M_2$, d.h. $2a_1 - b_1 = 3c_1$ und $2a_2 - b_2 = 3c_2$. Dann ist auch $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 \in M_2$, da

  $$2(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = (2a_1 - b_1) + (2a_2 - b_2) = c_1 + c_2.$$

- **M_2 ist abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation**:
  Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $ax^2 + bx + c \in M_2$, d.h. $2a - b = 3c$. Dann ist auch
  $\alpha(ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + (\alpha c) \in M_2$, da

  $$2(\alpha a) - (\alpha b) = \alpha(2a - b) = \alpha(3c) = 3(\alpha c).$$

Also ist M_2 ein Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.