1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -6 & 2 & 4 & -8 \\ -3 & 9 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \,|\, \vec{b}]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ keine Lösung besitzt?

2. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert von B.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist.

(d) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $B = SDS^{-1}$ an.

(e) Ist B invertierbar?

(f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Aufgabe

6 Punkte

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $C := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ \alpha & -9 & -4 & -2 \\ -1 & -5\alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von C linear abhängig?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?

(d) Berechnen Sie für $\alpha = -5$ die Determinante von $-3C^T$.

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit Basis $\mathcal{B} := \{x^2+1, x^2+x, x^2-2\}$ und die lineare Abbildung $L : V \to V$, von der folgendes bekannt sei:

$$L(x^2+1) = 3, \quad L(x^2+x) = x+2, \quad L(1) = 1\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $x^2 - 2$ im Kern von L liegt.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ von V.

(c) Ist L injektiv/surjekiv/bijektiv?

5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien $T := \left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ und $M := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass T ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Wählen Sie aus der Menge M eine Basis $\mathcal{C}$ von T aus. Begründen Sie Ihre Wahl.

(c) Welche Dimension besitzt T?

6. Aufgabe

6 Punkte

Sei $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} | A \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\}$ mit der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie ausgehend von $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{ONB}$ von V bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_V = \frac{1}{2}ad + \frac{1}{9}be + \frac{1}{8}cf.$$

(b) Beschreibt die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\star : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_\star = \frac{1}{2}ad + \frac{1}{8}cf$$

ebenfalls ein Skalarprodukt auf V?