Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 14/15

L. Gauckler, M. Hammer, F. Lutz, R. Nabben 20.02.2015

Februar – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -6 & 2 & 4 & -8 \\ -3 & 9 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A\,|\,\vec{b}\,]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ keine Lösung besitzt?

(a) **(3 Punkte)**

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 2 & 4 & -8 & 8 \\ -3 & 9 & -3 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & -3 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}+3\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathrm{NZSF}([A|\vec{b}])$$

(b) **(3 Punkte)**
Ausgehend von der NZSF in a): Die Nichtkopfvariablen parametrisieren die Lösungsmenge. Setze: $x_2 := r,\ x_3 := s,\ x_5 := t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen: $x_1 - 3r + s = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 + 3r - s$ und $x_4 - 2t = 1 \Leftrightarrow x_4 = 1 + 2t$. Somit ist die Lösungsmenge des LGS:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 2+3r-s \\ r \\ s \\ 1+2t \\ t \end{bmatrix} \middle|\ r,s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\ r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) **(1 Punkt)**
Eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ wird durch die Spalten der Matrix A gebildet, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach a) sind dies die erste und die vierte Spalte von A. Somit ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) **(1 Punkt)**
Nach c) sind in einer Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ zwei Vektoren. Somit ist $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Also gibt es einen Vektor (sogar unendlich viele) $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, der nicht im Bild von A liegt, also so, dass das LGS $A\vec{x} = \vec{v}$ nicht lösbar ist.

---

2. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert von B.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist.

(d) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $B = SDS^{-1}$ an.

(e) Ist B invertierbar?

(f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) **(1 Punkt)**
B ist eine obere Dreiecksmatrix, also stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen: $\lambda_{1/2} = 4$ und $\lambda_3 = 6$.

(b) **(2 Punkte)** Für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1/2}$ gilt:

$$V_{\lambda_{1/2}} = \text{Kern}\left\{B - \lambda_{1/2} \cdot I_3\right\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \overset{\text{II}-\text{I}}{=} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(c) **(1 Punkt)** $B\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Also ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 6.

(d) **(3 Punkte)** B ist diagonalisierbar, falls die algVFH gleich der geomVFH für alle Eigenwerte ist. Nach a) bzw. b) ist $\lambda_{1/2}$ eine doppelte Nullstelle des char. Polynoms und die algVFH von $\lambda_{1/2}$ ist somit 2. Die geomVFH von $\lambda_{1/2}$ ist ebenfalls 2, da nach b) der zugehörige Eigenraum zweidimensional ist. Die algVFH von λ_3 ist nach a) gleich 1. Da die geomVFH eines Eigenwerts maximal so groß ist, wie die algVFH, aber mindestens 1, ist auch die geomVFH von λ_3 gleich 1. Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte überein und B ist folglich diagonalisierbar.

Eine Diagonalisierung von B ist: $B = SDS^{-1}$ mit $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

(e) **(1 Punkt)** B ist invertierbar, falls bijektiv. Alle Eigenwerte von B sind verschieden von 0. Der Kern von B besteht daher nur aus dem Nullvektor und B ist injektiv. Aus dem Dimensionssatz folgt, dass B auch surjektiv und damit bijektiv, also invertierbar, ist.

(f) **(1 Punkt)** Lösung mit der Eigenvektormethode: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert 6 . Daraus folgt: $y(t) = e^{\lambda_3(t-2)}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{6(t-2)} \\ 2e^{6(t-2)} \\ 0 \end{bmatrix}$.

---

3. Aufgabe

6 Punkte

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $C := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ \alpha & -9 & -4 & -2 \\ -1 & -5\alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von C linear abhängig?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?

(d) Berechnen Sie für $\alpha = -5$ die Determinante von $-3C^T$.

(a) **(2 Punkte)**

$$\det(C) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ \alpha & -9 & -4 & -2 \\ -1 & -5\alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{(-1)(-1)\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \alpha & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der ersten Zeile}}$$

$$= \underbrace{1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) + (-1) \cdot (-2) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der dritten Spalte}} = -(\alpha - 4) + 2(3 + 1) = \alpha + 4.$$

(b) **(1 Punkt)**
Die Spalten von C sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante von C 0 beträgt, also genau dann, wenn $\alpha = -4$.

(c) **(1 Punkt)**
C ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von 0 verschieden ist, also für alle $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -4$.

(d) **(2 Punkte)**
Nach a) ist für $\alpha = -5$ ist $\det(C) = -1$. Somit ist $\det(-2C^T) = (-3)^4 \det(C^T) = (-3)^4 \det(C) = 81 \cdot (-1) = -81$.

---

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit Basis $\mathcal{B} := \left\{x^2+1, x^2+x, x^2-2\right\}$ und die lineare Abbildung $L : V \to V$, von der folgendes bekannt sei:

$$L(x^2+1) = 3, \quad L(x^2+x) = x+2, \quad L(1) = 1\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $x^2 - 2$ im Kern von L liegt.
(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ von V.
(c) Ist L injektiv/surjekiv/bijektiv?

(a) **(2 Punkte)**
$L(x^2-2) = L\left((x^2+1) - 3 \cdot (1)\right) = L(x^2+1) - 3L(1) = 3 - 3 = 0.$
Also liegt $x^2 - 2$ in $\text{Kern}(L)$.

(b) **(6 Punkte)**
Spaltenweise Bestimmung von $L_\mathcal{B}$:

$$L_\mathcal{B}\vec{e}_1 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_\mathcal{B}\left(L(x^2+1)\right) = K_\mathcal{B}(3) = K_\mathcal{B}\left((x^2+1) - (x^2-2)\right)$$

$$\overset{lin.}{=} K_\mathcal{B}\left(x^2+1\right) - K_\mathcal{B}\left(x^2-2\right) \vec{e}_1 - \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L_\mathcal{B}\vec{e}_2 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_\mathcal{B}\left(L(x^2+x)\right) = K_\mathcal{B}(x+2)) = K_\mathcal{B}\left((x^2+x) - (x^2-2)\right)$$

$$\overset{lin.}{=} K_\mathcal{B}\left(x^2+x\right) - K_\mathcal{B}\left(x^2-2\right) \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L_\mathcal{B}\vec{e}_3 = K_\mathcal{B}(L(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_\mathcal{B}\left(L(x^2-2)\right) \overset{a)}{=} K_\mathcal{B}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $L_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) **(1 Punkt)**
Aus Aufgabenteil (b) bzw. $L_\mathcal{B}$ erkennen wir, dass 0 ein Eigenwert von L ist. Deshalb ist L weder injektiv noch surjektiv und folglich nicht bijektiv.

---

5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien $T := \left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ und $M := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass T ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
(b) Wählen Sie aus der Menge M eine Basis $\mathcal{C}$ von T aus. Begründen Sie Ihre Wahl.
(c) Welche Dimension besitzt T?

(a) **(3 Punkte)**

- T ist nicht leer, da $\vec{0} \in T$ (wähle $a = b = 0$).
- Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in T. Dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2c \\ 2d \\ -d \end{bmatrix}$.

  Somit ist $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c \\ 2d \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) \\ 2(b+d) \\ -(b+d) \end{bmatrix} \in T$.

- Seien $\vec{u}$ in T, $\alpha \in R$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix}$.

  Somit ist $\alpha\vec{u} = \alpha \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\alpha a) \\ 2(\alpha b) \\ -(\alpha b) \end{bmatrix} \in T$.

T erfüllt alle Teilraumkriterien und ist folglich ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

(b) **(3 Punkte)**
Wähle $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.Die beiden Vektoren in $\mathcal{C}$ sind linear unabhängig, da keine Vielfachen voneinander. Weiter gilt:
$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in T$ für $a := 0, b := -1$ bzw. $a := 2, b := 0$. Also gilt $\mathcal{C} \subseteq T$ (und da T ein Teilraum ist auch span $\mathcal{C} \subseteq T$). Weiter lassen sich alle Vektoren $\begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix} \in T$ als Linearkombination der Vektoren in $\mathcal{C}$ darstellen: $-b \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ -b \end{bmatrix}$. Somit gilt auch span $\mathcal{C} \supseteq T$ und folglich ist span $\mathcal{C} = T$.

(c) **(1 Punkt)**
Da die Basis $\mathcal{C}$ von T zwei Vektoren enthält, ist die Dimension von T gleich 2.

---

6. Aufgabe 6 Punkte

Sei $V := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} | A \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\}$ mit der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie ausgehend von $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{ONB}$ von V bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_V = \frac{1}{2}ad + \frac{1}{9}be + \frac{1}{8}cf.$$

(b) Beschreibt die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\star : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_\star = \frac{1}{2}ad + \frac{1}{8}cf$$

ebenfalls ein Skalarprodukt auf V?

(a) **(5 Punkte)** Wir bestimmen mit Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis:

$$Q_1 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{8}4^2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Q_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}1^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Q_3 = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{8}2^2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir $\mathcal{B}_{ONB} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) **(1 Punkt)**
Es gilt: $\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle_\star = 0$. Also ist die Abbildung nicht positiv definit und somit kein Skalarprodukt.