Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: R. Kruse, C. Merdon, R. Nabben
Ass.: Beßlich, Seib

SS 16
27.07.2016

Modulprüfung „Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A \,|\, \vec{b}\,]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ keine Lösung besitzt?

2. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert von B.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist.

(d) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $B = SDS^{-1}$ an.

(e) Ist B invertierbar?

(f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe

6 Punkte

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $C := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ \alpha & -9\alpha & -4 & -3 \\ -1 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von C linear abhängig?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?

(d) Berechnen Sie für $\alpha = -2$ die Determinante von $-2C^T$.

4. Aufgabe

7 Punkte

Sei $V := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| A \text{ ist obere Dreiecksmatrix} \right\}$ mit der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie ausgehend von $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ von V bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_V = \frac{1}{18}ad + \frac{1}{4}be + \frac{1}{2}cf.$$

(b) Beschreibt die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\star : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_\star = 4ad + 2be$$

ebenfalls ein Skalarprodukt auf V?

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit Basis $\mathcal{B} := \{x^2+2, 3x-2, x^2\}$ und die lineare Abbildung $L : V \to V$, von der folgendes bekannt sei:

$$L(x^2+2) = -4x^2, \quad L(3x-2) = 4x^2+6, \quad L(-3x) = -6\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass x^2 im Kern von L liegt.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ von V.

(c) Ist L injektiv/surjekiv/bijektiv?

6. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien $T := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}$ und $M := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass T ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Wählen Sie aus der Menge M eine Basis $\mathcal{C}$ von T aus. Begründen Sie Ihre Wahl.

(c) Welche Dimension besitzt T?