Technische Universität Berlin **Wintersemester 2016/2017**
Fakultät II – Institut für Mathematik **10. März 2017**
Doz.: F. Lutz, R. Nabben, M. Rafler, P. Winkert
Ass.: D. Beßlich, M. Voß, J. Zur

Modulprüfung „Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf DIN-A4-Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **7 Punkte**

Gegeben seien die invertierbare Matrix A und der Vektor $\vec{b}$, definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(b) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Bild}(A))$ und geben Sie $\mathrm{Kern}(A)$ an.

(c) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ explizit an. Hinweis: Man kann das Ergebnis aus (a) verwenden.

Lösung:

(a) [3 Punkte]
Es gilt

$$[A|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\mathrm{IV-I}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\mathrm{III}-6\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{2}\mathrm{IV}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\mathrm{I+II}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] = [I_4|A^{-1}].$$

(b) [2 Punkte]
Da A invertierbar ist, ist die Dimension des Bildes von A gleich der Anzahl der Spalten von A, d.h. $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = 4$. Hieraus folgt auch $\mathrm{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$.

(c) [2 Punkte]
Da A invertierbar ist, ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ die einzige Lösung, d.h.

$$\mathbb{L} = \left\{A^{-1}\vec{b}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}.$$

2. **Aufgabe** **8 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenräume zu den Eigenwerten von B und geben Sie die geometrische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte an.

(c) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $B = SDS^{-1}$ an.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) [2 Punkte]

Da charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

Alternativ: B ist eine obere Dreiecksmatrix. Also stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen, d.h. die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

(b) [3 Punkte]

Für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,2} = 1$ gilt

$$\begin{aligned} V_{\lambda_{1,2}} = \operatorname{Kern}(B - \lambda_{1,2} \cdot I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\overset{\frac{1}{2}\mathrm{II}}{=} \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\mathrm{III-II}}{=} \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Also ist die geometrische Vielfachheit für $\lambda_{1,2}$ gleich 1.

Für $\lambda_3 = 2$ gilt

$$V_{\lambda_3} = \mathrm{Kern}\,(B - \lambda_3 \cdot I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)\mathrm{II}}{=} \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)\mathrm{I}}{=} \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I+II}}{=} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Also ist die geometrische Vielfachheit für λ_3 gleich 1.

(c) [1 Punkt]
Da die geometrische Vielfachheit von $\lambda_{1,2}$ gleich 1 und somit echt kleiner als die algebraische Vielfachheit von $\lambda_{1,2}$ ist (diese ist 2), ist B nicht diagonalisierbar.

(d) [2 Punkte]
Der gegebene Vektor kann als Linearkombination von Eigenvektoren geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$y(t) = e^{B(t-2)}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e^{2(t-2)}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot e^{1(t-2)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2e^{2(t-2)} + 2e^{t-2} \\ 2e^{2(t-2)} \\ e^{2(t-2)} \end{pmatrix}.$$

3. **Aufgabe** **6 Punkte**

Gegeben seien die folgenden Abbildungen

$$F_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2,2}, \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & a-b \end{pmatrix},$$
$$F_2 : V \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a - b,$$

wobei V definiert ist durch

$$V := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(F_2)$ und $\mathrm{Bild}(F_2)$.

Lösung:

(a) [1 Punkt]

Es gilt $F_1(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ und somit ist F_1 nicht linear, da es die notwendige Bedingung einer linearen Abbildung nicht erfüllt.

(b) [3 Punkte]

Seien $A_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $A_2 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F_2(A_1 + A_2) = F_2\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}\right) &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \\ &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = F_2(A_1) + F_2(A_2) \end{aligned}$$

und

$$F_2(\alpha A_1) = F_2\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{pmatrix}\right) = (\alpha a_1) - (\alpha b_1) = \alpha(a_1 - b_1) = \alpha F_2(A_1).$$

Also ist F_2 additiv und homogen und somit eine lineare Abbildung.

(c) [2 Punkte]

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(F_2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; F_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a - b = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a = b \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V \right\} \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Bild}(F_2) = \left\{ F_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

4. **Aufgabe** **9 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

deren Spalten

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A bzgl. des Standardskalarproduktes mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie $|\det(A)|$ mit Hilfe von Teil (a).
Hinweis: Falls Sie (a) nicht gelöst haben, dann nutzen Sie die Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) [7 Punkte]
Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Spalten von A an um Q zu bestimmen.

(i) $\vec{b}_1$ normieren:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(ii) $\vec{l}_2$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\vec{l}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1\rangle \vec{q}_1 &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(iii) $\vec{l}_2$ normieren:

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(iv) $\vec{l}_3$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\vec{l}_3 &= \vec{b}_3 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(v) $\vec{l}_3$ normieren:

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{l}_3}{\|\vec{l}_3\|} = \frac{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left\langle \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 (1^2 + (-2)^2 + 1^2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ und

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Die obere Dreiecksmatrix R erhält man durch $R = Q^T A$, d.h.

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(b) [2 Punkte]

Es gilt $|\det(Q)| = 1$ und somit folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$|\det(A)| = |\det(Q)||\det(R)| = |\det(R)| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. **Aufgabe** **9 Punkte**

Gegeben seien der Vektorraum

$$V := \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \;\middle|\; a = -d,\ b = -c\right\}$$

mit Basis

$$\mathcal{B} := \left\{\vec{b}_1 := x^3 + 2x^2 - 2x - 1,\ \vec{b}_2 := -x^3 + 1\right\}$$

und die lineare Abbildung $L : V \to V$, von der Folgendes bekannt sei:

$$L\left(x^2 - x\right) = 2x^3 - 2, \quad L\left(x^3 + x^2 - x - 1\right) = -2x^3 + 2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ im Kern von L liegt.

(b) Schreiben Sie $-x^3 + 1$ als Linearkombination von $x^2 - x$ und $x^3 + x^2 - x - 1$.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ von V.

(d) Überprüfen Sie L auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Lösung:

(a) [2 Punkte]
Es gilt

$$\begin{aligned} L\left(x^3 + 2x^2 - 2x - 1\right) &= L\left((x^2 - x) + (x^3 + x^2 - x - 1)\right) \\ &= L\left(x^2 - x\right) + L\left(x^3 + x^2 - x - 1\right) \\ &= (2x^3 - 2) + (-2x^3 + 2) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Also liegt $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ in $\mathrm{Kern}(L)$.

(b) [1 Punkt]
Es gilt $-x^3 + 1 = (x^2 - x) - (x^3 + x^2 - x - 1)$.

(c) [4 Punkte]
Wir bestimmen $L_{\mathcal{B}}$ spaltenweise in dem wir die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ bestimmen

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 &= K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(x^3 + 2x^2 - 2x - 1\right)\right) \overset{\text{(a)}}{=} K_{\mathcal{B}}\left(\vec{0}\right) = \vec{0}, \\ L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 &= K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(-x^3 + 1\right)\right) \\ &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left((x^2 - x) - (x^3 + x^2 - x - 1)\right)\right) \\ &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(x^2 - x\right) - L\left(x^3 + x^2 - x - 1\right)\right) \\ &= K_{\mathcal{B}}\left((2x^3 - 2) - (-2x^3 + 2)\right) \\ &= K_{\mathcal{B}}\left(4x^3 - 4\right) = (-4)K_{\mathcal{B}}\left(-x^3 + 1\right) = -4\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Also ist

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(d) [2 Punkte]
Da $L_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist erkennen wir, dass 0 ein Eigenwert von L ist. Deshalb ist L weder injektiv noch surjektiv und folglich nicht bijektiv.

6. **Aufgabe** **6 Punkte**

(a) Bestimmen Sie die Drehmatrix $R\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}^{2,2}$ für die Drehung gegen den Uhrzeigersinn im $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie die Potenz $\left(R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^7$.

(b) Geben Sie die inverse Matrix von $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ aus (a) an.
Hinweis: Benutzen Sie hier nicht den Inversionsalgorithmus, sondern eine Eigenschaft der Drehmatrizen.

(c) Bestimmen Sie die Spiegelungsmatrix S, welche durch die Spiegelung an der durch $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erzeugten Geraden definiert ist.

Lösung:

(a) [2 Punkte]
Es gilt

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und da $R\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$ einer ganzen Drehung entspricht also $R\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = I$ erhalten wir

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = R\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = R\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) [2 Punkte]
Da $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ eine orthogonale Matrix ist, gilt

$$\left(R_{1,2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \left(R_{1,2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) [2 Punkte]
Der Vektor $\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\vec{v}$ ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$) und somit folgt mit der Formel aus der Vorlesung

$$S = I - 2\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ: Sei $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}$.
1) Es gilt $S\vec{e}_1 = -\vec{e}_2$. Dies ist äquivalent zu

$$s_1 = 0 \qquad s_3 = -1.$$

2) Es gilt $S\vec{e}_2 = -\vec{e}_1$. Dies ist äquivalent zu

$$s_2 = -1 \qquad s_4 = 0.$$