

Modulprüfung
„Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: Vorname:
Matr.-Nr.: Studiengang:

Neben einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf DIN-A4-Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,5}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- (a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in normierte Zeilenstufenform.
 (b) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ explizit an.
 (c) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(A)$.
 (d) Ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{c}$ für alle Vektoren $\vec{c} \in \mathbb{R}^4$ lösbar?

Lösung:

- (a) [3 Punkte]

$$\begin{aligned}
 [A|\vec{b}] &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{II}+4\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\text{IV}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\text{III}-4\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\frac{1}{2}\text{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \text{NZSF}([A|\vec{b}]).
 \end{aligned}$$

- (b) [2 Punkte]

Wir setzen die Nichtkopfvariablen auf reelle Parameter, d.h. $x_2 = s \in \mathbb{R}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$.
 Aus der normierten Zeilenstufenform erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$x_1 - s + 2t = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 + s - 2t$$

$$x_3 + t = 2 \Leftrightarrow x_3 = 2 - t$$

$$x_5 = -3$$

Somit erhalten wir als Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 + s - 2t \\ s \\ 2 - t \\ t \\ -3 \end{array} \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{array} \right) + s \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) [1 Punkt]

Eine Basis des Bildes von A ist durch die Spalten von A gegeben, die zu Kopfvariablen von $\text{NZSF}(A)$ gehören. Somit bildet

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\text{Bild}(A)$.

(d) [1 Punkt]

Nein. Es gilt $\text{Rang}(A) = 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Somit ist A nicht surjektiv. Insbesondere existieren also $\vec{c} \in \mathbb{R}^4$ mit $A\vec{x} \neq \vec{c}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$.

2. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an.
- (b) Geben Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A an.
- (c) Ist die Matrix A invertierbar?
- (d) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3,3}$, sodass gilt:

$$A = S \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Lösung:

(a) [2 Punkte]

Die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts ist 1. Dies ist bereits durch die Aufgabenstellung gegeben.

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner gleich der algebraischen und mindestens 1. Somit ist die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts von A genau 1.

(b) [1 Punkt] Die Eigenwerte von A (mit ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt) sind die Nullstellen von $p_A(\lambda)$, folglich gilt $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(2 - \lambda)$.

(c) [2 Punkte] Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist.

Da 0 kein Eigenwert von A ist, ist die Matrix invertierbar.

(d) [2 Punkte] Es muss für die Spalten von S gelten:

$$A\vec{s}_1 = -1\vec{s}_1 = \lambda_2\vec{s}_1,$$

$$A\vec{s}_2 = 1\vec{s}_2 = \lambda_3\vec{s}_2,$$

$$A\vec{s}_3 = 2\vec{s}_3 = \lambda_1\vec{s}_3.$$

Eine mögliche Lösung ist $\vec{s}_1 = \vec{v}_2$, $\vec{s}_2 = \vec{v}_3$, $\vec{s}_3 = \vec{v}_1$. Somit ist eine Matrix S durch

$$S = [\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

3. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad M := \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass T ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.
(b) Bestimmen Sie eine Teilmenge von M , die eine Basis von T ist. Weisen Sie nach, dass das von Ihnen gewählte M eine Basis von T ist.
(c) Bestimmen Sie die Dimension von T .

Lösung:

- (a) [3 Punkte]

Offenbar ist

$$\begin{aligned} T &:= \left\{ \begin{pmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Somit ist T als lineare Hülle per Definition ein Vektorraum. Da außerdem $T \subset \mathbb{R}^{2,2}$ gilt, ist T ein Unterraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

Alternativ:

Zunächst gilt $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$, da $0 \in \mathbb{R}$ ist. Somit ist T nicht leer.

Seien nun $\begin{pmatrix} 2a_1 & -b_1 \\ -b_1 & 2a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \in T$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 2a_1 & -b_1 \\ -b_1 & 2a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + 2a_2 & -b_1 - b_2 \\ -b_1 - b_2 & 2a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a_1 + a_2) & -(b_1 + b_2) \\ -(b_1 + b_2) & 2(a_1 + a_2) \end{pmatrix} \in T,$$

da $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, falls $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Somit ist T abgeschlossen bezüglich der Addition.

Seien nun $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} \in T$. Dann ist

$$\alpha \begin{pmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha a & -\alpha b \\ -\alpha b & 2\alpha a \end{pmatrix} \in T,$$

da $\alpha a, \alpha b \in \mathbb{R}$, falls $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Somit ist T abgeschlossen bezüglich der skalaren Multiplikation.

Somit ist T ein Unterraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

- (b) [4 Punkte]

Wir wählen $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Wir untersuchen \mathcal{B} auf lineare Unabhängigkeit. Aus

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt $\alpha = \beta$ mit dem Eintrag $(1, 2)$ und $2\alpha = 0$ mit dem Eintrag $(1, 1)$. Dies ist nur für $\alpha = 0 = \beta$ erfüllt. Somit ist \mathcal{B} linear unabhängig.

Wir zeigen, dass \mathcal{B} ein Erzeugendensystem von T ist. Seien also $a, b \in \mathbb{R}$, d.h. $\begin{pmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} \in T$. Es ist nun zu zeigen, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten aus der obigen Bedingung zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2a &= 2\alpha \\ -b &= -\alpha + \beta \end{aligned}$$

Aus (I) folgt $\alpha = a$ und damit $\beta = -b + a$ aus (II).

Also ist \mathcal{B} ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von T , d.h. eine Basis von T .

(c) [1 Punkt]

Da die Basis \mathcal{B} von T zwei Elemente hat, gilt $\dim(T) = 2$.

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum der reellen symmetrischen 2×2 -Matrizen

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

mit einer Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ B_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

und eine lineare Abbildung

$$L : V \rightarrow V, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & a+b \\ a+b & c \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich \mathcal{B} .
- Bestimmen Sie den Kern von $L_{\mathcal{B}}$ und den Kern von L .
- Überprüfen Sie L auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Lösung:

(a) [3 Punkte]

Wir berechnen $L_{\mathcal{B}}$ spaltenweise.

1. Spalte:

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_1 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1))) = K_{\mathcal{B}}(L(B_1)) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Spalte:

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_2 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2))) = K_{\mathcal{B}}(L(B_2)) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Spalte:

$$L_{\mathcal{B}}\vec{e}_3 = K_{\mathcal{B}}(L(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3))) = K_{\mathcal{B}}(L(B_3)) = K_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) [3 Punkte] Wir bestimmen zunächst NZSF($L_{\mathcal{B}}$).

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{I}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{II}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\text{II}; -\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{NZSF}(L_{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

Wir setzen für die Nichtkopfvariable $x_3 = s \in \mathbb{R}$.

$$\text{Dann erhalten wir } \text{Kern}(L_{\mathcal{B}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Den Kern von L erhalten wir durch Transformation aus dem Kern von $L_{\mathcal{B}}$. Es ist

$$\begin{aligned} \text{Kern}(L) &= \text{span} \left\{ K_{\mathcal{B}}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\} = \text{span} \left\{ 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

(c) [2 Punkte]

Injektivität und Bijektivität: L ist nicht injektiv, da $\text{Kern}(L) \neq \{0\}$. Insbesondere ist L also nicht bijektiv, da L nicht injektiv ist.

Surjektivität: L ist nicht surjektiv, da mit dem Dimensionssatz

$$\dim(\text{Bild}(L)) = \dim(V) - \dim(\text{Kern}(L)) = \dim(V) - 1$$

gilt und daraus $\dim(\text{Bild}(L)) < \dim(V)$ folgt.

5. Aufgabe**7 Punkte**Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 3 & \alpha & -1 \\ -1 & 8 & -9 & -5\alpha \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

gegeben.

- (a) Berechnen Sie $\det(A_\alpha)$ mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.
 (b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass die Spalten von A_α linear unabhängig sind.
 (c) Geben Sie die Determinante von $2A_{-2}^T$ an.

Lösung:

- (a) [3 Punkte] Wir berechnen die Determinante von A mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

$$\begin{aligned} \det(A_\alpha) &\stackrel{1. \text{ Spalte}}{=} 0 + -1 \cdot (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + 0 + 0 = \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{3. \text{ Zeile}}{=} 1 \cdot (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha - 4 + 2(3 + 1) = \alpha + 4 \end{aligned}$$

- (b) [2 Punkte]

Die Spalten von A_α sind genau dann linear unabhängig wenn $\det(A_\alpha) = \alpha + 4 \neq 0$ gilt.

In unserem Fall also für alle $\alpha \neq -4$.

- (c) [2 Punkte]

Wir nutzen die folgenden Rechenregeln für die Determinante einer $n \times n$ -Matrix A :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) \\ \det(c \cdot A) &= c^n \det(A) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\det(2A_{-2}^T) = \det(2A_{-2}) = 2^4 \det(A_{-2}) = 16(-2 + 4) = 32.$$

6. Aufgabe**8 Punkte**Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, ausgestattet mit dem folgenden Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \langle a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \rangle &= 2a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2. \end{aligned}$$

Weiter ist durch

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := x^2 + x + 1, \quad \vec{b}_2 := -x + 1, \quad \vec{b}_3 := 2 \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens aus \mathcal{B} eine Orthonormalbasis \mathcal{B}_{ONB} von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von x bezüglich \mathcal{B}_{ONB} .

Lösung:

- (a) [6 Punkte]

Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Vektoren in \mathcal{B} an, um \mathcal{B}_{ONB} zu bestimmen.

- (i) \vec{b}_1 normieren:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{x^2 + x + 1}{\|x^2 + x + 1\|} = \frac{1}{\sqrt{2+1+1}} (x^2 + x + 1) = \frac{1}{2} (x^2 + x + 1).$$

- (ii) \vec{l}_2 bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{l}_2 &= \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = -x + 1 - \left\langle -x + 1, \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) \right\rangle \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) \\ &= -x + 1 - \left(0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) \\ &= -x + 1 - 0 \cdot \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) = -x + 1. \end{aligned}$$

- (iii) \vec{l}_2 normieren:

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|} = \frac{-x + 1}{\|-x + 1\|} = \frac{1}{\sqrt{0+1+1}} (-x + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + 1).$$

- (iv) \vec{l}_3 bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{l}_3 &= \vec{b}_3 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 \\ &= 2 - \left\langle 2, \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) \right\rangle \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) - \left\langle 2, \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + 1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + 1) \\ &= 2 - (0 + 0 + 1) \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) - \left(0 + 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + 1) \\ &= 2 - \frac{1}{2} (x^2 + x + 1) - (-x + 1) \\ &= 2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + x - 1 = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (-x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

- (v) \vec{l}_3 normieren:

$$\begin{aligned} \vec{q}_3 &= \frac{\vec{l}_3}{\|\vec{l}_3\|} = \frac{\frac{1}{2} (-x^2 + x + 1)}{\left\| \frac{1}{2} (-x^2 + x + 1) \right\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}} \left(\frac{1}{2} (-x^2 + x + 1) \right) = \frac{1}{2} (-x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \frac{1}{2} (x^2 + x + 1), \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + 1), \frac{1}{2} (-x^2 + x + 1) \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

(b) [2 Punkte] Für eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ gilt

$$K_{\mathcal{B}}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{q}, \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{q}, \vec{b}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir

$$K_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, \frac{1}{2}(x^2 + x + 1) \rangle \\ \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + 1) \rangle \\ \langle x, \frac{1}{2}(-x^2 + x + 1) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{2} + 0 \\ 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \\ 0 + \frac{1}{2} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$