

Modulprüfung
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“
Teil: „Lineare Algebra“

Name: Vorname:
 Matr.-Nr.: Studiengang:

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit für die Teilleistung im Fach „Lineare Algebra“ beträgt 60 Minuten.

Die Gesamtklausur ist mit 45 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile (Analysis I und Lineare Algebra) der Klausur mindestens 40% der Punkte erreicht worden sind.

Ich habe bereits nach alter Prüfungsordnung die Modulklausur „Analysis I für Ingenieurwissenschaften“ bestanden/anerkannt bekommen.

Korrektur Lineare Algebra

1	2	3	4	Σ

Punktzahl: Analysis I Lineare Algebra Gesamtpunktzahl

Σ

Σ

Σ

1. Aufgabe**(9 Punkte)**

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Bestimmen Sie A^{-1} .
- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.
- (c) Bestimmen Sie $\text{Kern}(A)$ und $\dim(\text{Bild}(A))$.
- (d) Liegt der Vektor $\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ im Kern von A ?

2. Aufgabe**(8 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

- (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von B .
- (b) Ist B diagonalisierbar?
- (c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(-3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe**(6 Punkte)**Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$C_\alpha := \begin{pmatrix} -2 & \alpha & 0 & 3 \\ 4\alpha & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante von C_α mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz (angewandt auf 4×4 - und 3×3 -Matrizen).
- (b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat C_α den Eigenwert 0?
- (c) Berechnen Sie die Determinante von $(C_{-1})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) C_9^T$.

4. Aufgabe**(7 Punkte)**

Welche der folgenden Mengen sind Teilräume? Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

- (a) $S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- (b) $S_2 := \{B \in \mathbb{R}^{3,3} \mid B \text{ besitzt genau drei paarweise verschiedene Eigenwerte}\} \subseteq \mathbb{R}^{3,3}$
- (c) $S_3 := \{ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \mid a + b = 0\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte