

1. Aufgabe

(9 Punkte)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in normierte Zeilenstufenform.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.
- Bestimmen Sie $\dim(\text{Bild}(A))$ und $\dim(\text{Kern}(A))$.
- Geben Sie eine Basis des Bildes von A an.
- Geben Sie einen Vektor an, der nicht im Kern von A liegt.

Lösung:

- (a) [3 Punkte]

Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ und formen um

$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{I}+2\cdot\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \text{NZSF}([A|\vec{b}]) \end{aligned}$$

- (b) [2 Punkte] Wir setzen $x_3 = s$ und erhalten $x_1 = 1 - s$ und $x_2 = 1$ aus $\text{NZSF}([A|\vec{b}])$.

$$\text{Daraus ergibt sich die Lösungsmenge } \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (c) [3 Punkte]

Aus der normierten Zeilenstufenform von $[A|\vec{b}]$ ergibt sich durch Zählen der Köpfe bzw. Nicht-Köpfe, dass $\dim(\text{Bild}(A))=2$ bzw. $\dim(\text{Kern}(A))=1$ gilt.

- (d) Die Köpfe von $\text{NZSF}([A|\vec{b}])$ befinden sich in der ersten und zweiten Spalte, daher ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ eine Basis von } \text{Bild}(A).$$

- (e) [1 Punkt]

$$\text{Beispielsweise gilt } A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ und daher } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Kern}(A).$$

2. Aufgabe

(8 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

- (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B .
- (b) Bestimmen Sie den Eigenraum und die geometrische Vielfachheit des betragsmäßig größten Eigenwerts von B .
- (c) Ist B diagonalisierbar?
- (d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- (a) [3 Punkte]

Für das charakteristische Polynom von B berechnen wir

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} (-3 - \lambda) & 2 & 0 \\ 0 & (-3 - \lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (1 - \lambda) \end{bmatrix} \\ &= (-3 - \lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} (-3 - \lambda) & 0 \\ 1 & (1 - \lambda) \end{bmatrix} \\ &= (-3 - \lambda)^2(1 - \lambda) = -(\lambda + 3)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -3$ und $\lambda_3 = 1$.

- (b) [2 Punkte]

Wir berechnen den Eigenraum des Eigenwerts $\lambda_{1,2} = -3$:

$$V_{\lambda_{1,2}=-3} = \text{Kern}(B - (-3)I_3) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus ergibt sich $\text{geom.VFH}(\lambda_{1,2} = -3) = 1$.

- (c) [1 Punkt]

Nein, denn für den Eigenwert $\lambda_{1,2} = -3$ gilt

$$2 = \text{alg.VFH}(\lambda_{1,2} = -3) \neq \text{geom.VFH}(\lambda_{1,2} = -3) = 1.$$

- (d) [2 Punkte]

Wir schreiben den gegebenen Vektor zunächst als skalares Vielfaches eines Eigenvektors von B zum Eigenwert -3 :

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$y(t) = e^{B(t-2)} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot e^{(-3)(t-2)} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

(7 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz (angewandt auf 4×4 - und 3×3 -Matrizen).
(b) Betrachten Sie nun die reellen 4×4 -Matrizen

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(C_1)$ und $\det(C_2)$ aus $\det(C)$ anhand gewisser Eigenschaften der Determinante, d.h. **ohne Verwendung** der Laplace-Entwicklung.

- (c) Berechnen Sie $\det(C^T \cdot C^{-1})$.

Lösung:

- (a) [4 Punkte]

Wir entwickeln die Determinante von C zunächst nach der dritten Spalte, anschließend jeweils nach der dritten Zeile und erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \det(C) &\stackrel{3.\text{Spalte}}{=} 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{jew. } 3.\text{Zeile}}{=} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1) \cdot \left((-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)) - (2 \cdot (-2) - 4 \cdot 4) - \left(- (2 \cdot 2 - 2 \cdot 4) + (2 \cdot (-2) - 4 \cdot 4) \right) \\ &= 60 - (-20) - (4 - 20) = 96. \end{aligned}$$

- (b) [2 Punkte]

Die Matrix C_1 geht aus C durch Vertauschung der ersten und dritten Zeile hervor, daher gilt $\det(C_1) = (-1) \cdot \det(C) = -96$.

Die Matrix C_2 geht aus C durch skalare Multiplikation mit dem Wert $\frac{1}{2}$ hervor, daher gilt $\det(C_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \det(C) = \frac{1}{16} \cdot 96 = 6$.

- (c) [1 Punkt]

Es gilt $\det(C^T \cdot C^{-1}) = \det(C^T) \cdot \det(C^{-1}) = \det(C) \cdot \det(C)^{-1} = 1$.

4. Aufgabe

(6 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

$$(a) L_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_2 - 4v_3 \\ 2v_1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) L_2: \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2,2} \quad ax + b \mapsto \begin{pmatrix} 2a + b & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$(c) L_3: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ax + (cd + b)$$

Lösung:

- (a) [1 Punkt] Die Abbildung L_1 ist nicht linear, da der Nullvektor nicht auf den Nullvektor abgebildet wird: Es gilt

$$L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

- (b) [4 Punkte] Die Abbildung L_2 ist linear.

i.) Additivität: Seien $\vec{p} := ax + b$, $\vec{q} := cx + d \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} L_3(\vec{p}) + L_3(\vec{q}) &= \begin{pmatrix} 2a + b & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c + d & d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a + b + 2c + d & b + d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a + c) + (b + d) & b + d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= L_3((a + c)x + (b + d)) = L_3(\vec{p} + \vec{q}). \end{aligned}$$

ii.) Homogenität: Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} L_3(\lambda \cdot \vec{p}) &= L_3((\lambda \cdot a)x + (\lambda \cdot b)) = \begin{pmatrix} 2(\lambda \cdot a) + \lambda \cdot b & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot b & \lambda \cdot a \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a + b & b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \cdot L_3(\vec{p}). \end{aligned}$$

- (c) [1 Punkte]

Die Abbildung L_3 ist nicht linear. Wir setzen dazu $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt $L_3(A) = 1$, jedoch ist $L_3(A + A) = L_3\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 \neq 1 + 1 = L_3(A) + L_3(A)$.

Damit ist L_3 nicht additiv, also auch nicht linear.