1. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(\text{Bild}(A))$ und $\dim(\text{Kern}(A))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes von A an.

(e) Geben Sie einen Vektor an, der nicht im Kern von A liegt.

Lösung:

(a) [3 Punkte]
Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ und formen um

$$\begin{aligned}
[A|I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{I}+2\cdot\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \text{NZSF}([A|\vec{b}])
\end{aligned}$$

(b) [2 Punkte] Wir setzen $x_3 = s$ und erhalten $x_1 = 1 - s$ und $x_2 = 1$ aus $\text{NZSF}([A|\vec{b}])$.
Daraus ergibt sich die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) [3 Punkte]
Aus der normierten Zeilenstufenform von $[A|\vec{b}]$ ergibt sich durch Zählen der Köpfe bzw. Nicht-Köpfe, dass $\dim(\text{Bild}(A))=2$ bzw. $\dim(\text{Kern}(A))=1$ gilt.

(d) Die Köpfe von $\text{NZSF}([A|\vec{b}])$ befinden sich in der ersten und zweiten Spalte, daher ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\text{Bild}(A)$.

(e) [1 Punkt]

Beispielsweise gilt $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ und daher $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Kern}(A)$.

2. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum und die geometrische Vielfachheit des betragsmäßig größten Eigenwerts von B.

(c) Ist B diagonalisierbar?

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \qquad \vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) [3 Punkte]

Für das charakteristische Polynom von B berechnen wir

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} (-3-\lambda) & 2 & 0 \\ 0 & (-3-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} (-3-\lambda) & 0 \\ 1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)^2(1-\lambda) = -(\lambda+3)^2(\lambda-1). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -3$ und $\lambda_3 = 1$.

(b) [2 Punkte]

Wir berechnen den Eigenraum des Eigenwerts $\lambda_{1,2} = -3$:

$$V_{\lambda_{1,2}=-3} = \text{Kern}\,(B - (-3)I_3) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Daraus ergibt sich geom.VFH($\lambda_{1,2} = -3$)$=1$.

(c) [1 Punkt]

Nein, denn für den Eigenwert $\lambda_{1,2} = -3$ gilt

$$2 = \text{alg.VFH}(\lambda_{1,2} = -3) \neq \text{ geom.VFH}(\lambda_{1,2} = -3) = 1.$$

(d) [2 Punkte]

Wir schreiben den gegebenen Vektor zunächst als skalares Vielfaches eines Eigenvektors von B zum Eigenwert -3:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$y(t) = e^{B(t-2)} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot e^{(-3)(t-2)} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Betrachten Sie die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz (angewandt auf 4×4- und 3×3-Matrizen).

(b) Betrachten Sie nun die reellen 4×4-Matrizen

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(C_1)$ und $\det(C_2)$ aus $\det(C)$ anhand gewisser Eigenschaften der Determinante, d.h. **ohne Verwendung** der Laplace-Entwicklung.

(c) Berechnen Sie $\det\left(C^T \cdot C^{-1}\right)$.

Lösung:

(a) [4 Punkte]

Wir entwickeln die Determinante von C zunächst nach der dritten Spalte, anschließend jeweils nach der dritten Zeile und erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}
\det(C) &\overset{3.\,Spalte}{=} 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{jew.\ 3.\,Zeile}{=} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\
&\qquad + (-1) \cdot \left((-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= 5 \cdot (4 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)) - (2 \cdot (-2) - 4 \cdot 4) - \Big(-(2 \cdot 2 - 2 \cdot 4) + (2 \cdot (-2) - 4 \cdot 4) \Big) \\
&= 60 - (-20) - (4 - 20) = 96.
\end{aligned}$$

(b) [2 Punkte]

Die Matrix C_1 geht aus C durch Vertauschung der ersten und dritten Zeile hervor, daher gilt $\det(C_1) = (-1) \cdot \det(C) = -96$.

Die Matrix C_2 geht aus C durch skalare Multiplikation mit dem Wert $\frac{1}{2}$ hervor, daher gilt $\det(C_2) = (\frac{1}{2})^4 \cdot \det(C) = \frac{1}{16} \cdot 96 = 6$.

(c) [1 Punkt]

Es gilt $\det\left(C^T \cdot C^{-1}\right) = \det\left(C^T\right) \cdot \det\left(C^{-1}\right) = \det(C) \cdot \det(C)^{-1} = 1$.

4. **Aufgabe** **(6 Punkte)**

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

(a) $L_1\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_2 - 4v_3 \\ 2v_1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $L_2\colon \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2} \; ax + b \longmapsto \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(c) $L_3\colon \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ax + (cd + b)$

Lösung:

(a) [1 Punkt] Die Abbildung L_1 ist nicht linear, da der Nullvektor nicht auf den Nullvektor abgebildet wird: Es gilt

$$L_1\left(\vec{0}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

(b) [4 Punkte] Die Abbildung L_2 ist linear.

i.) Additivität: Seien $\vec{p} := ax + b,\ \vec{q} := cx + d \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} L_3(\vec{p}) + L_3(\vec{q}) &= \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c+d & d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a+b+2c+d & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a+c)+(b+d) & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \\ &= L_3((a+c)x + (b+d)) = L_3(\vec{p} + \vec{q}). \end{aligned}$$

ii.) Homogenität: Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} L_3(\lambda \cdot \vec{p}) &= L_3((\lambda \cdot a)x + (\lambda \cdot b)) = \begin{pmatrix} 2(\lambda \cdot a) + \lambda \cdot b & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot b & \lambda \cdot a \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \cdot L_3(\vec{p}). \end{aligned}$$

(c) [1 Punkte]

Die Abbildung L_3 ist nicht linear. Wir setzen dazu $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt $L_3(A) = 1$, jedoch ist $L_3(A + A) = L_3\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 \neq 1 + 1 = L_3(A) + L_3(A)$.

Damit ist L_3 nicht additiv, also auch nicht linear.

5. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben sei der Vektorraum $V := \left\{ax^3 + bx^2 + c(x+1) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ mit der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{\vec{b}_1 := x^3,\ \vec{b}_2 := x^2,\ \vec{b}_3 := x + 1\right\}$$

und die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L\colon V &\longrightarrow V \\ ax^3 + bx^2 + c(x+1) &\longmapsto 2(a+c)x^3 + (a+c)x^2 + 3c(x+1). \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Gegeben seien nun eine zweite Basis

$$\mathcal{B}' := \left\{\vec{b}'_1 := x^3 + x^2,\ \vec{b}'_2 := 2x^2,\ \vec{b}'_3 := 3(x+1)\right\}$$

von V und Transformationsmatrizen $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ und $S_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}'}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$ mithilfe der Matrizen $L_{\mathcal{B}}, S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ und $S_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

(c) Bestimmen Sie $L(4x^2)$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(L)$ an.

Lösung:

(a) [3 Punkte]

Wir bestimmen $L_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{3,3}$ spaltenweise:

$$L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_1\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(2x^3 + x^2\right) = K_{\mathcal{B}}\left(2\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_2)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_2\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(\vec{0}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}}(\vec{e}_3) &= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_3)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(L\left(\vec{b}_3\right)\right) = K_{\mathcal{B}}\left(2x^3 + x^2 + 3(x+1)\right) \\ &= K_{\mathcal{B}}\left(2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit gilt $L_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) [3 Punkte]

Es gilt

$$L_{\mathcal{B}'} = S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot L_{\mathcal{B}} \cdot S_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) [3 Punkte]

Es gilt $L(4x^2) = 0$. Offenbar ist $\dim(\mathrm{Bild}(L)) = \dim(\mathrm{Bild}(L_{\mathcal{B}})) = 2$, also $\dim(\mathrm{Kern}(L)) = 1$ nach Dimensionssatz. Somit bildet die Menge $\{4x^2\}$ eine Basis des Kerns von L.

6. **Aufgabe** **(6 Punkte)**

Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet.

(a) Bestimmen Sie aus den Spalten von A mittels Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

(b) Geben Sie die QR-Zerlegung von A an.

Lösung:

(a) [4 Punkte]

Für $\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen wir:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{l}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{l}_3 &= \vec{b}_3 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{b}_3, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{l}_3}{\|\vec{l}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Orthonormalbasis ist durch

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

(b) [2 Punkte]

Wir setzen $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und um die Matrix R zu bekommen lösen wir $A = Q \cdot R$ nach R auf. Da Q nach Konstruktion eine orthogonale Matrix ist, gilt $Q^{-1} = Q^T$ und wir erhalten $R = Q^T \cdot A$.

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
R = Q^T A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$