

1. Schriftliche Leistungskontrolle

Logik: Gedächtnisprotokoll

WS 18/19

Vorbemerkungen

Die Aufgabenstellungen sind durch mich z.T. paraphrasiert. Ich habe mich bemüht, dass die Aufgabenstellungen soweit stimmen, kann aber nicht garantieren, dass sie fehlerfrei sind. Mir entfallene Details habe ich entsprechend gekennzeichnet.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen gewesen (keine Formelsammlung, kein Skript, etc.; es wurden auch nur die Aufgabenstellungen ausgeteilt, keine weiteren Hilfestellungen). Die Bearbeitungszeit betrug 60 Minuten + 15 Minuten Lesezeit (insgesamt 75 Minuten, in denen geschrieben werden durften). Ab einer Punktzahl von 52 Punkten (von 66 Gesamtpunkten) hat man die volle Portfoliepunkte für die Prüfungsleistung bekommen.

Aufgabe 1

4 + 4 + 8 = 16 Punkte

- (i) Seien $\Phi \subseteq \text{AL}$, $\varphi \in \text{AL}$.

Geben Sie die Definition von

a) $\Phi \models \varphi$ und

b) „ φ ist erfüllbar“

an. Verwenden Sie lediglich die Begriffe *Formel* und *Belegung*, sowie die Auswertungsfunktion $\llbracket \cdot \rrbracket$.

- (ii) Sei $\varphi \in \text{AL}$.

Erklären Sie den Kontext, in dem die Aussage „ φ ist erfüllt“ getätigt werden kann. Erklären sie den Unterschied zu der Aussage „ φ ist erfüllbar“.

- (iii) Geben Sie für die folgenden Aussagenpaare an, ob im Allgemeinen aus der einen Aussage die jeweilige andere folgert. (*ja/nein*)

Seien $\varphi, \psi \in \text{AL}$, $\Phi \subseteq \text{AL}$, β passende Belegungen, beliebig. (*für die jeweiligen Aussagenpaare einzeln*)

A_i	B_i	A_i impliziert B_i	B_i impliziert A_i
$\beta \models \varphi$ und $\beta \models \psi$	$\varphi \models \psi$		
<i>Ist mir leider entfallen.</i>	<i>Ist mir leider entfallen.</i>		
$\beta \models \varphi \Leftrightarrow \beta \models \psi$	$\varphi \equiv \psi$		
Φ ist unerfüllbar	$\Phi \models \varphi$		

Aufgabe 2

4 + 6 + 6 = 16 Punkte

- (i) Erklären Sie, was es bedeutet, dass der Resolutionskalkül *vollständig* und *korrekt* ist.
- (ii) Sei \mathcal{C} eine Klauselmengende. Es gilt $\text{Res}(C_1, C_2) = C$. Beweisen Sie $\{C_1, C_2\} \models C$.
- (iii) Beweisen Sie per Resolution, dass φ unerfüllbar ist.
 φ war eine längere Formel (mit digitaler Schrift eine Zeile füllend), welche nicht in KNF war und somit erst mithilfe von logischen Äquivalenzen in KNF umgewandelt werden musste um die Resolution durchzuführen.

Aufgabe 3

2 + 15 = 17 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}, t \in \{1, \dots, n\}$ sind $P_{i,t} \in \text{AVAR}$ aussagenlogische Variablen.

$$\varphi_n := \bigwedge_{1 \leq i \leq n+1} \left(\bigvee_{1 \leq t \leq n} P_{i,t} \right)$$
$$\psi_n := \bigwedge_{1 \leq t \leq n} \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} P_{i,t} \vee P_{j,t} \right)$$

- (i) Geben Sie φ_2, ψ_2 , sowie eine Belegung, welche zugleich φ_2 und ψ_2 erfüllt, ohne Begründung an.
- (ii) Beweisen Sie $\varphi_n \models \psi_n$

Aufgabe 4

1 + 5 + 3 + 5 + 3 = 17 Punkte

Ein Graph G heißt k -färbbar, wenn eine Funktion $c : V(G) \rightarrow 1, \dots, k$ existiert, sodass $c(u) \neq c(v)$ für alle $\{u, v\} \in E(G)$.

Sei G unendlich.

- (i) Zeigen Sie, dass wenn G 4-färbbar ist, jeder endliche Teilgraph von G 4-färbbar ist.
- (ii) Geben Sie eine Formelmengende Φ_G ohne Begründung an, die genau dann erfüllbar ist, wenn G 4-färbbar ist.

- (iii) Zeigen Sie, wie Sie aus Φ_G eine 4-Färbung von G konstruieren können und umgekehrt.
- (iv) Zeigen Sie, dass wenn jeder endliche Teilgraph von G 4-färbbar ist, jede endliche Teilmenge von Φ_G erfüllbar ist.
- (v) Folgern Sie, dass wenn jeder endliche Teilgraph von G 4-färbbar ist, auch G 4-färbbar ist.