

Schriftlicher Test Logik

Aufgabe:	1	2	3
Punkte:			

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 160 Testpunkte zu erreichen. 4 Testpunkte entsprechen einem Portfoliopunkt. Es können maximal 40 Portfoliopunkte erarbeitet werden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

Form der Abgabe: Lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert. Schreiben Sie die Lösung zu jeder Aufgabe unter die Aufgabe und auf die Rückseite des vorherigen Blattes. Falls Sie mehr Platz benötigen, werden wir Ihnen auf Anfrage weitere Blätter zur Verfügung stellen.

Aufgabe 1

26+24=50 Punkte

- (i) Zeigen Sie, dass die folgende Regel korrekt ist. Sie dürfen dafür **keine** der Regeln des Sequenzkalküls verwenden.

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\varphi \vee \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi \vee \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

(Siehe nächste Seite für Unteraufgabe (ii).)

Regeln des Sequenzkalküls

$$(\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi}$$

$$(\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} (*)$$

$$(S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$$

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} (*)$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(\Rightarrow S) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

(*) wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln stehen t und t' für einen beliebigen Term und $t \doteq t'$ bedeutet, dass wir $t = t'$ oder $t' = t$ verwenden können.

(ii) Sei $\sigma = \{R, P\}$ eine Signatur mit zwei einstelligen Relationssymbolen R und P . Zeigen Sie, unter **ausschließlicher** Verwendung der Regeln des Sequenzkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

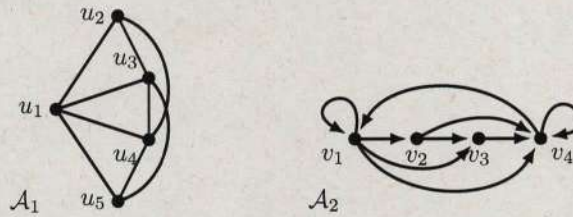
$$(\quad) \frac{}{\forall x \forall y (R(x) \rightarrow P(y)) \Rightarrow \forall x P(x), \neg \exists x R(x)}$$

Aufgabe 2

24+14+20=58 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligem Relationssymbol E .

(i) Betrachten Sie folgende drei σ -Strukturen \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 und \mathcal{A}_3 .



und $\mathcal{A}_3 := (\mathbb{Z}, E^{\mathbb{Z}})$ mit $E^{\mathbb{Z}} := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y \text{ oder } y = |x|\}$.

Weiter definieren wir folgende Formeln φ_1 und φ_2 :

- $\varphi_1(x) := \forall y(E(x, y) \vee E(y, x))$, und
- $\varphi_2(x) := \forall y \forall z (x = z \vee (E(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z)))$.

Geben Sie ohne Begründung für alle $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$ die Menge $\varphi_i(\mathcal{A}_j)$ an.

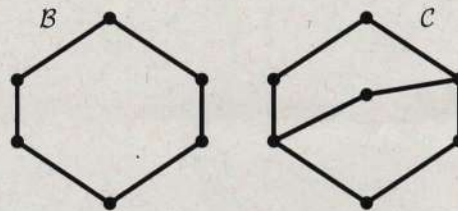
(Siehe nächste Seite für die Unteraufgaben (ii) und (iii).)

- (ii) Geben Sie ohne Begründung eine σ -Struktur mit einem Universum mit maximal 6 Elementen an, welche die Formel φ erfüllt.

$$\varphi := \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (E(x, y) \leftrightarrow \neg E(y, x))) \wedge \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)$$

Anmerkung: Eine graphische Darstellung der Struktur wie in (i) und (ii) ist ausreichend.

- (iii) Betrachten Sie folgende Strukturen \mathcal{B} und \mathcal{C} .



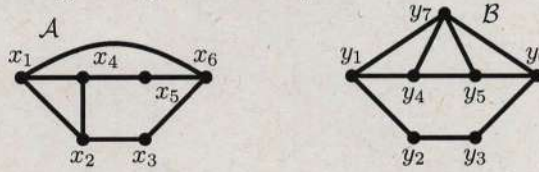
Geben Sie ohne Begründung einen Satz $\psi \in FO[\sigma]$ mit Quantorenrang 3 an, sodass $\mathcal{B} \not\models \psi$ und $\mathcal{C} \models \psi$.

Anmerkung: Sie können die Hälfte der Punkte mit einem Satz mit Quantorenrang 4 erreichen.

Aufgabe 3

4+4+18+26=52 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E . Wir definieren die σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} über ihre Darstellung als ungerichtete Graphen.



- (i) Geben Sie ohne Begründung das minimale $m \in \mathbb{N}$ an, sodass der Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine Gewinnstrategie besitzt.
- (ii) Geben Sie ohne Begründung das maximale $k \in \mathbb{N}$ an, sodass die Duplikatorin im Spiel $\mathfrak{G}_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine Gewinnstrategie besitzt.
- (iii) Geben Sie ohne Begründung eine unterscheidende Formel für \mathcal{A} und \mathcal{B} mit kleinstmöglichem Quantorenrang an.
- (iv) Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an, wobei ℓ so klein wie möglich ist. Sie müssen die Minimalität von ℓ nicht begründen. Begründen Sie kurz, warum es sich um eine Gewinnstrategie handelt.