Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

WS 17/18

2. Schriftliche Leistungskontrolle Logik

Name, Vorname: ______________________

Los-Nr.: [ ] Bitte nicht vergessen!

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 100 Punkte zu erreichen.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.
Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert. Schreiben Sie die Lösung zu jeder Aufgabe unter die Aufgabe und auf die Rückseite des Blattes. Falls Sie mehr Platz benötigen, werden wir Ihnen auf Anfrage weitere Blätter zur Verfügung stellen.
Los-Nummer: Bitte merken Sie sich Ihre Los-Nummer. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

18 Punkte

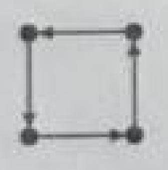
Aufgabe 1

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E. Auf der linken Seite sind fünf σ-Strukturen gegeben. Ordnen Sie mit Hilfe der Tabelle rechts den Strukturen die Formeln zu, die von ihnen erfüllt werden. Eine Struktur kann mehrere Sätze erfüllen.

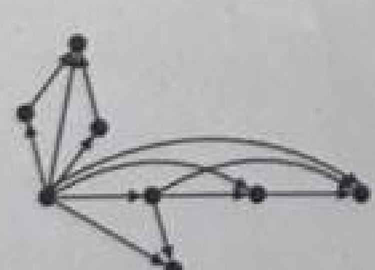
Achtung! Es gibt Abzug für falsche Zuordnungen.

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, E^{\mathcal{A}})$, wobei $x, y \in E^{\mathcal{A}}$ gdw. $x < y$

$\mathcal{B}$: 

$\mathcal{C}$: 

$\mathcal{D} = (\mathbb{N}, E^{\mathcal{D}})$, wobei $x, y \in E^{\mathcal{D}}$ gdw. $x < y$

$\mathcal{E}$: 

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$
$\varphi_1 := \forall x \forall y\, (E(x,y) \to E(y,x))$					
$\varphi_2 := \exists x \exists y \forall z (E(x,z) \vee E(y,z) \vee x = z \vee y = z)$					
$\varphi_3 := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\bigwedge_{1 \le i < j \le 3} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i,j \in \{1,2,3\}} \neg E(x_i, x_j))$					
$\varphi_4 := \forall x \forall y \forall z (E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z))$					
$\varphi_5 := \exists x \forall y\, (x \neq y \to E(x,y))$					

Lösung zu Aufgabe 1

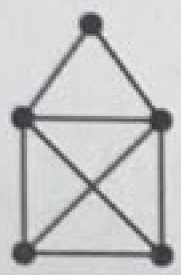
2. Leistungskontrolle Logik WS 17/18

Losnummer:

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, E^{\mathcal{A}})$
wobei $x, y \in E^{\mathcal{A}}$
gdw. $x < y$

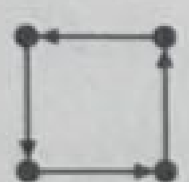
$\varphi_1 := \forall x \forall y \, (E(x,y) \rightarrow E(y,x))$

$\mathcal{B}$:



$\varphi_2 := \exists x \exists y \forall z \, (E(x,z) \vee E(y,z) \vee x = z \vee y = z)$

$\mathcal{C}$:

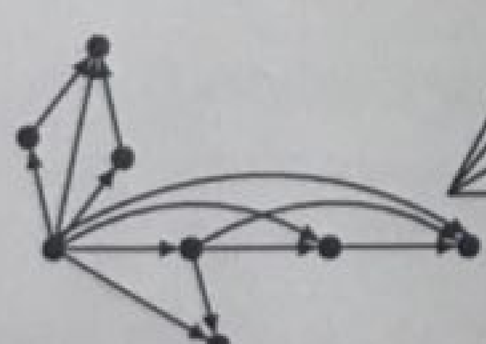


$$\varphi_3 := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i,j \in \{1,2,3\}} \neg E(x_i, x_j) \right)$$

$\mathcal{D} = (\mathbb{N}, E^{\mathcal{D}})$
wobei $x, y \in E^{\mathcal{D}}$
gdw. $x < y$

$\varphi_4 := \forall x \forall y \forall z \, (E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z))$

$\mathcal{E}$:



$\varphi_5 := \exists x \forall y \, (x \neq y \rightarrow E(x,y))$

4+4+4+4=16 Punkte

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Geben Sie ohne Begründung für $i \in \{1, \ldots, 4\}$ Formeln φ_i an, sodass gilt:

(i) $\varphi_1(\mathcal{N})$ ist die Menge der Zahlen, die sich als dritte Potenz einer natürlichen Zahl schreiben lassen.

(ii) $\varphi_2(\mathcal{N})$ ist die Menge der Paare (x, x^3) mit $x \in \mathbb{N}$.

(iii) $\varphi_3(\mathcal{N})$ ist die Menge der Zahlen, die größer als 4 sind.

(iv) $\varphi_4(\mathcal{N})$ ist die Menge der Primzahlen. Achtung! Die kleinste Primzahl ist 2.

Lösung zu Aufgabe 2

Hier gibt es viele Möglichkeiten. Eine ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{null}(x) &= x + x = x && \text{„}x\text{ ist 0“} \\
\mathrm{eins}(x) &= x \cdot x = x \wedge x + x \neq x && \text{„}x\text{ ist 1“} \\
\varphi_1(x) &= \exists y((y \cdot y) \cdot y = x) \\
\varphi_2(x, y) &= (x \cdot x) \cdot x = y \\
\varphi_3(x) &= \neg\mathrm{null}(x) \wedge \exists e \left(\mathrm{eins}(e) \wedge \bigwedge_{i=1}^{4} x \neq \underbrace{(\cdots(e+e) + \cdots + e)}_{i \text{ mal}} \right) \\
\varphi_4(x) &= \exists e \forall y \forall z \big(\mathrm{eins}(e) \wedge x \neq e \wedge (y \cdot z = x \to (y = e \vee z = e))\big)
\end{aligned}
$$

φ_3 sagt „$x \neq 0$ und $x \neq 1$ und $x \neq 2$ und ... und $x \neq 4$“. Damit ist x größer als 4.

φ_4 sagt „Wenn sich x als Produkt $y \cdot z$ schreiben lässt, dann ist einer der Faktoren 1“. Das ist genau die Definition einer Primzahl.

Aufgabe 3

2+4+6=12 Punkte

(i) Gibt es eine Signatur σ, sodass jede σ-Struktur endlich ist? Beweisen Sie ihre Antwort.

(ii) Betrachten Sie die folgenden beiden Strukturen über der Signatur $\{+,\cdot,0,1\}$, wobei $+$ und $\cdot$ zweistellige Funktionssymbole sind und 0 und 1 Konstantensymbole.

$\mathcal{A} := (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$, wobei $+^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}$ und $1^{\mathcal{A}}$ wie üblich auf den ganzen Zahlen definiert sind und $\mathcal{B} := (\mathbb{Z}^3, +^{\mathcal{B}}, \cdot^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}}, 1^{\mathcal{B}})$, wobei für alle $(a_1,a_2,a_3)\,,(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{Z}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
+^{\mathcal{B}}((a_1,a_2,a_3)\,,(b_1,b_2,b_3)) &:= (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\\
\cdot^{\mathcal{B}}((a_1,a_2,a_3)\,,(b_1,b_2,b_3)) &:= (a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2, a_3\cdot b_3)\\
0^{\mathcal{B}} &:= (0,0,0)\\
1^{\mathcal{B}} &:= (1,1,1)
\end{aligned}$$

Geben Sie einen Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ an. Sie brauchen Ihre Antwort in dieser Teilaufgabe nicht zu beweisen.

(iii) Sei A eine endliche, nicht-leere Menge und σ eine endliche, relationale Signatur. Zeigen Sie, dass es nur endlich viele σ-Strukturen mit Universum A gibt.

Lösung zu Aufgabe 3

- Nein. Sei σ eine beliebige Signatur. Dann ist die Struktur mit Universum $\mathbb{N}$, die alle Konstantensymbole mit 0, alle Funktionssymbole mit der konstanten 0-Funktion und alle Relationssymbole leer interpretiert eine unendliche σ-Struktur.
- $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3$, $x \mapsto (x,x,x)$
- Jedes der endlich vielen Relationssymbole in σ hat endliche Stelligkeit. Sei k die größte davon. Da es nur endlich viele Teilmengen von A^k gibt, gibt es nur endliche viele unterschiedliche Möglichkeiten die Relationssymbole zu interpretieren. Die σ-Strukturen mit Universum A unterscheiden sich allerdings nur in der Interpretation der Relationen. Somit gibt es also nur endlich viele davon.

Losnummer: ________

2. Leistungskontrolle Logik WS 17/18

2+10+10=22 Punkte

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgende Signatur $\sigma = \{R\}$ wobei R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

(i) Was bedeutet es, dass der Sequenzenkalkül vollständig ist? Achtung! Es ist nur nach Vollständigkeit gefragt, nicht nach Korrektheit.

(ii) Zeigen Sie nur mit Hilfe des Sequenzenkalküls, dass die Sequenz $\exists x \forall y\, R(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, R(x,y)$ gültig ist. Geben Sie in jedem Schritt an welche Regel verwendet wurde. In jedem Schritt darf nur eine einzige Regelanwendung gemacht werden. Falls Sie die Substitutionsregeln anwenden, geben Sie bitte ψ, t und t' an.

$$\exists x \forall y\, R(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, R(x,y)$$

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln.

a) $$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

b) $$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta}.$$

Lösung zu Aufgabe 4

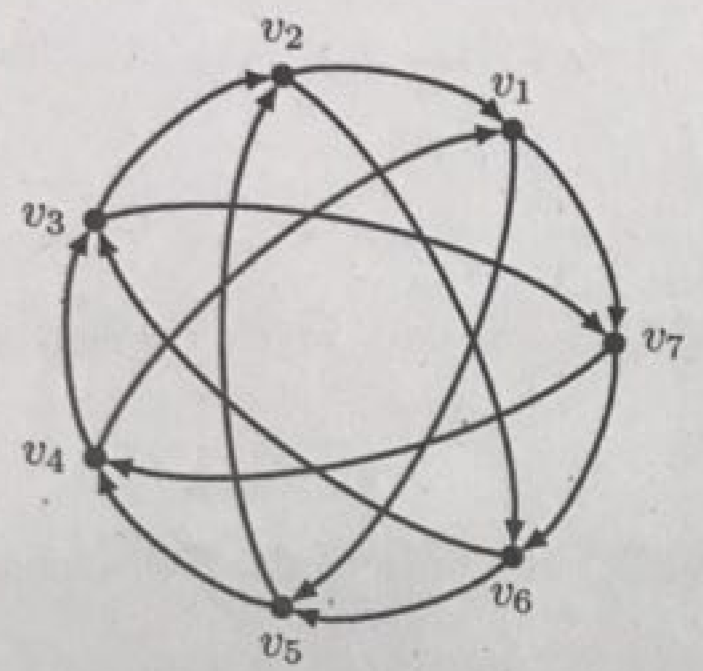
(i) Für alle gültigen Sequenzen existiert ein Beweis im Sequenzenkalkül, welcher belegt, dass die Sequenz gültig ist.
(ii) a) Ang. die Prämissen sind gültig.
Ang. $\mathcal{I}$ ist eine Interpretation, welche Φ erfüllt.
Fall 1: Es existiert $\delta \in \Delta$ mit $\mathcal{I} \models \delta$. Wir sind hier schon fertig, da δ auch in der Konsequenz rechts vorhanden ist.
Fall 2: Für kein $\delta \in \Delta$ gilt $\mathcal{I} \models \delta$. Da $\Phi \Rightarrow \Delta, \psi$ gültig ist, wissen wir $\mathcal{I} \models \psi$ und da $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi$ gültig ist, wissen wir auch $\mathcal{I} \models \varphi$. Demnach gilt auc $\mathcal{I} \models \psi \wedge \varphi$.
Somit ist die Regel korrekt.
b) Seien $\Phi := \{\forall x\ x = x\}$, $\Delta := \emptyset$ und $\varphi := \forall x\ x = x$.
In diesem Fall ist die Prämisse ein Axiom und somit gültig, aber die Konsequenz ist ungültig, da Φ unter jeder Interpretation erfüllt ist, aber die rechte Seite leer ist.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{R(d,c) \Rightarrow R(d,c)}}{R(d,c) \Rightarrow \exists x\ R(x,c)}\ (\Rightarrow\exists)}{\forall y\ R(d,y) \Rightarrow \exists x\ R(x,c)}\ (\forall\Rightarrow)}{\exists x \forall y\ R(x,y) \Rightarrow \exists x\ R(x,c)}\ (\exists\Rightarrow)}{\exists x \forall y\ R(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\ R(x,y)}\ (\Rightarrow\forall)$$

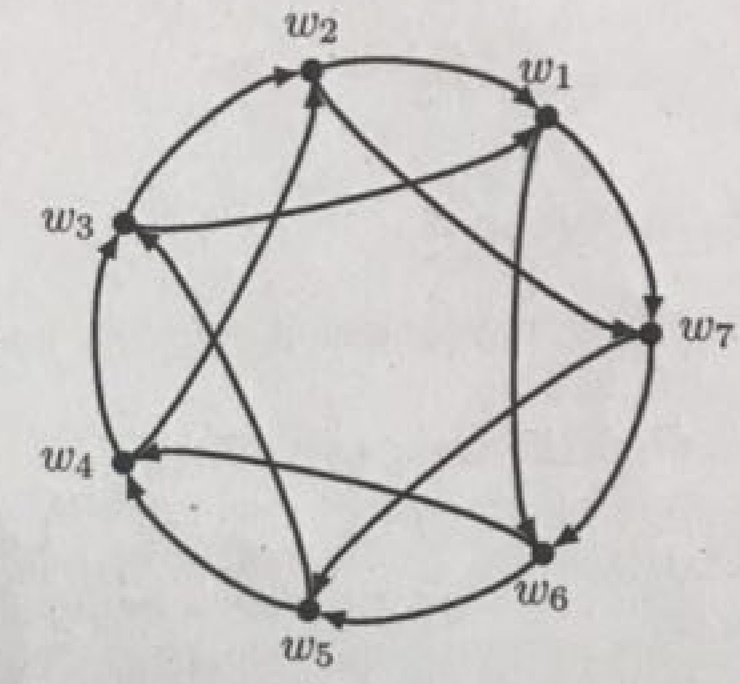
Aufgabe 5 2+6+4+5=17 Punkte

Betrachte die beiden folgenden Strukturen über der Signatur $\sigma = \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist.

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



(i) Geben Sie ohne Begründung das minimale $m \in \mathbb{N}$ an, sodass der Herausforderer das m-Runden-Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt.

(ii) Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer in $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an. Begründen Sie kurz, warum es sich um eine Gewinnstrategie handelt.

(iii) Geben Sie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin in $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Begründen Sie kurz, warum es sich um eine Gewinnstrategie handelt.

(iv) Geben Sie ohne Begründung eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ minimalen Quantorenrangs an, sodass gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Lösung zu Aufgabe 5

(i) $m = 3$

(ii) Wähle als H $w_3, w_4, w_5 \in B$. Da $(w_5, w_3), (w_5, w_4), (w_4, w_3) \in E^{\mathcal{B}}$, aber keine drei Elemente $a_1, a_2, a_3 \in A$ existieren, mit $(a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_2, a_1) \in E^{\mathcal{A}}$, hat D hier verloren.

(iii) In der ersten Runde antwortet D mit einem beliebigen Element aus der anderen Struktur. Seien $v_i \in A$ und $w_j \in B$ die in der ersten runde gewählten Elemente.

Fall 1: H wählt v_k in $\mathcal{A}$. Falls $(v_i, v_k) \in E^{\mathcal{A}}$ dann wählt D w_{j-1} (bzw. w_7 falls $j = 1$). Falls $(v_k, v_i) \in E^{\mathcal{A}}$ dann wählt D w_{j+1} (bzw. w_1 falls $j = 7$). Ansonsten wählt D w_{j+3} (bzw. w_{j-3} falls $j \geq 5$).

Fall 2: H wählt w_k in $\mathcal{B}$. Falls $(w_j, w_k) \in E^{\mathcal{B}}$ dann wählt D v_{i-1} (bzw. v_7 falls $i = 1$). Falls $(w_k, w_j) \in E^{\mathcal{B}}$ dann wählt D v_{i+1} (bzw. v_1 falls $i = 7$). Ansonsten wählt D v_{i+2} (bzw. v_{i-2} falls $i \geq 6$).

In jedem Fall existieren diese Knoten mit denen D antwortet, da es sieben Knoten gibt und zu jedem ein- und ausgehende Kanten. Sie gewinnt, da sie beim Antworten immer die Relation beibehält.

(iv) $\varphi := \exists x \exists y \exists z\, (E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(z,x))$

15 Punkte

Aufgabe 6

Sei $\sigma := \{P, N\}$, wobei P und N einstellige Relationssymbole sind. Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, P^{\mathcal{R}}, N^{\mathcal{R}})$ die σ-Struktur mit

$$P^{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$
$$N^{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Geben Sie eine Formel ψ an, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{B}$ gilt

$$\mathcal{B} \models \psi \iff \text{Duplikatorin gewinnt das 1-Runden-Spiel } \mathfrak{G}_1(\mathcal{R}, \mathcal{B}).$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 6

In der Struktur $\mathcal{R}$ existiert ein Element a mit $a \in P^{\mathcal{R}}$, ein Element b mit $b \in N^{\mathcal{R}}$, ein Element c mit $c \notin P^{\mathcal{R}}$ und $c \notin N^{\mathcal{R}}$. Außerdem existiert kein Element d mit $d \in P^{\mathcal{R}}$ und $d \in N^{\mathcal{R}}$. Duplikatorin gewinnt das 1-Runden-Spiel $\mathfrak{G}_1(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ für eine Struktur $\mathcal{B}$ genau dann, wenn es in B Elemente mit genau diesen Eigenschaften gibt. Auf jede Wahl von Herausforderer in einer der Strukturen $\mathcal{R}$ oder $\mathcal{B}$ muss Duplikatorin nämlich ein Element des gleichen Typs in der anderen Struktur wählen können um zu gewinnen.

Also können wir als Formel ψ die folgende Formel wählen:

$$\psi = \exists x P(x) \land \exists x N(x) \exists x(\neg P(x) \land \neg N(x)) \land \neg \exists x(P(x) \land N(x)).$$