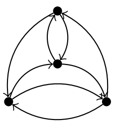
Ich habe mein Bestes gegeben von den Fotos die ich in der Einsicht gemacht habe alles richtig abzuschreiben, trotzdem gibt es natürlich keine Garantie darauf, dass die Aufgaben und Lösungen hier richtig sind.
An den Stellen, wo ich keine volle Punktzahl bekommen habe, habe ich mithilfe der Korrektur versucht die Aufgaben hier richtig zu lösen. Da ich nur einen Fehler in einem Beweis hatte und meine restlichen Fehler mir ziemlich ausführlich korrigiert wurden denke ich aber, dass dieses Dokument ziemlich richtig ist. Alles was ich nach der Klausur mithilfe der Korrektur hinzugefügt habe ist in rot gekennzeichnet.

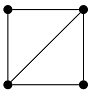
Aufgabe 1 — $10 + 9 = 19$ Punkte

Anmerkung: Falls sie ein Kreuz zurücknehmen möchten, malen sie *deutlich* über das Kreuz und schreiben Sie notfalls ihre Antwort neben die Tabelle. Markierungen in falschen Kästchen führen zu einem Punktabzug für die Unteraufgabe. Eine Unteraufgabe kann nicht weniger als 0 Punkte geben.

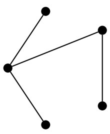
Sei $\sigma := \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E.

(i) Kreuzen Sie in der rechten Tabelle jedes Kästchen an, für welches gilt, dass die σ-Struktur in der Spalte die FO[σ]-Formel in der Zeile erfüllt. Die Strukturen, welche links definiert werden, können jeweils mehrere Sätze erfüllen.

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

$\mathcal{C} := (\mathbb{N}, E^{\mathcal{C}})$, wobei $(x,y) \in E^{\mathcal{C}}$ gdw. $x \leq y$.

$\mathcal{D}$: 

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
$\varphi_1 := \exists x \forall y (E(x,y) \vee x = y)$		X	X	
$\varphi_2 := \exists x \exists y \exists z (E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z))$	X	X	X	
$\varphi_3 := \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow E(x,y) \vee E(y,x)$	X		X	
$\varphi_4 := \exists x \exists y (E(x,y) \wedge \forall z (y \neq z \rightarrow \neg E(x,z)))$				X
$\varphi_5 := \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(y,x))$		X		X

(ii) Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob Sie wahr, oder falsch sind.

Wahr	Falsch	Aussage
	X	Der Sequenzenkalkül ist vollständig, weil er alle korrekten Regeln enthält.
X		Wenn $\Phi \models \varphi$, für $\Phi \subseteq \text{AL}$ und $\varphi \in \text{AL}$, dann gibt es eine endliche Menge $\Phi' \subseteq \Phi$ mit $\Phi' \models \varphi$.
X		Zwei endliche Strukturen sind isomorph genau dann, wenn sie elementar äquivalent sind.
	X	Es gibt ein bijektives $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
	X	Die Duplikatorin gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ genau dann, wenn eine Formel φ mit $qr(\varphi) \leq m$ existiert, sodass $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.
	X	Die Modellklasse einer prädikatenlogischen Formel φ ist die Mene aller Belegungen, die φ erfüllen.

Aufgabe 2

6 + 8 = 14 Punkte

(i) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Feld (i, j), für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $j \in \{a, b, c\}$, genau dann an, wenn $\Phi_i \models \varphi_j$ gilt.

Φ1 = { X ∧ Y }
Φ2 = { ⊤ → Y, Y ↔ X ∧ Z }
Φ3 = { ¬Z, Y → Z}

	$\varphi_a := Y$	$\varphi_b := X \wedge Z$	$\varphi_c := Z \to Y$
Φ_1	X		X
Φ_2	X	X	X
Φ_3			X

(ii) Sei $\varphi_1 := X_i \Rightarrow X_{i+1}$, für $i \in \mathbb{N}$ und sei $Phi_i := \{X_0\} \cup \{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N} \text{ und } j \leq i\}$.
Zeigen Sie: Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\Phi_i \models X_{i+1}$.

Beweis per Induktion über $i \in \mathbb{N}$:

IA: Dann ist $\Phi_0 = \{X_0, X_0 \to X_1\}$. Sei β eine zu $\Phi_0 \cup \{X_1\}$ passende Belegung, für die gilt $\beta \models \Phi_0$. Dann gilt insbesondere $\beta \models X_0$ und $\beta \models X_0 \to X_1$ und folglich gilt auch $\beta \models X_1$.

IV: Sei $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt, falls $\beta \models \Phi_i$, dann auch $\beta \models X_{i+1}$.

IS: Angenommen $\beta \models \Phi_{i+1}$.
Dann ist $\Phi_{i+1} = \{X_0, X_0 \to X_1, \ldots, X_i \to X_{i+1}, X_{i+1} \to X_{i+2}\} = \Phi_i \cup \{X_{i+1} \to X_{i+2}\}$.

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{X_{i+1} \to X_{i+2}\}$$
$$\Rightarrow \Phi_i = \Phi_{i+1} \setminus \{X_{i+1} \to X_{i+2}\}$$

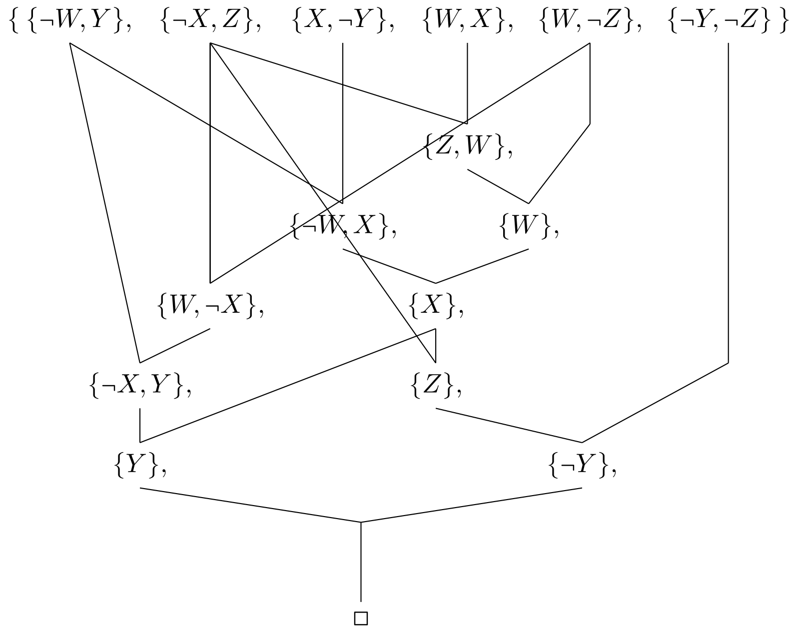
Angenommen $\beta \models \Phi_i$, dann gilt insbesondere $\beta \models X_{i+1}$ nach **IV** und da $\beta \models \Phi_{i+1}$ gilt insbesondere auch $\beta \models \{X_{i+1} \to X_{i+2}\}$ und folglich muss auch $\beta \models X_{i+2}$ gelten.

Erfüllt β Φ_{i+1} nicht, sind wir fertig. $\square$

Aufgabe 3 9 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist.

$$\{ \{W, \neg Z\}, \quad \{\neg X, Z\}, \quad \{W, X\}, \quad \{\neg W, Y\}, \quad \{X, \neg Y\}, \quad \{\neg Y, \neg Z\} \}$$



Aufgabe 4 2 + 8 + 9 = 19 Punkte

(i) Sei σ eine Signatur und $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Geben Sie ohne Begründung eine Sequenz an, die genau dann gültig ist, wenn $\varphi \models \psi$.

$$\varphi \Rightarrow \psi$$

(ii) Sei $\sigma := \{R\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol R. Geben Sie einen Sequenzkalkülbeweis für die Gültigkeit der Sequenz

$$\forall x R(x, x) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$$

an. Verwenden Sie dabei nur die gegebenen Regeln des Sequenzenkalküls.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R(c,c) \Rightarrow R(c,c)}}{\forall x R(x,x) \Rightarrow R(c,c)}\ (\forall\Rightarrow)}{\forall x R(x,x) \Rightarrow \exists R(x,c)}\ (\Rightarrow\exists)}{\forall x R(x,x) \Rightarrow \forall y \exists x R(x,y)}\ (\Rightarrow\forall)$$

(iii) Zeigen Sie die Korrektheit der folgenden Regel. Sie dürfen keine der Regeln des Sequenzenkalküls verwenden.

$$\frac{\overbrace{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}^{1} \quad \overbrace{\Phi, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}^{2}}{\underbrace{\Phi, \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \Delta}_{3}}$$

Angenommen, die obere Sequenz gilt.

Sei β eine zu $\Phi \cup \{\varphi \leftrightarrow \psi\} \cup \Delta$ passende Belegung, mit $\beta \models \Phi \cup \{\varphi \leftrightarrow \psi\}$.

Angenommen $\beta \models \Phi$. Dann gilt $\beta \models \delta$, mit einem $\delta \in \Delta$, $\beta \models \varphi$ oder $\beta \models \psi$.

Fall 1: Angenommen $\beta \models \delta, \delta \in \Delta$.
Dann muss nach der Annahme gelten $\beta \models \varphi$ und $\beta \models \psi$, da sonst 2 nicht erfüllt wäre. Dann gilt insbesondere auch $\beta \models \varphi \leftrightarrow \psi$ und damit ist 3 erfüllt. Die Regel gilt also.

Fall 2: Angenommen $\beta \models \varphi$.
Fall 2.1: Angenommen $\beta \models \psi$.
Dann folgt aus 2 $\beta \models \delta$, mit $\delta \in \Delta$ und die Regel stimmt, wie in Fall 1.

Falls 2.2: Angenommen $\beta \not\models \psi$.
Dann gilt $\beta \not\models \varphi \leftrightarrow \psi$ und, da die linke Seite der Implikation nicht gilt, gilt die Regel.

Fall 3: Angenommen $\beta \models \psi$.
Analog zu Fall 2.

Also gilt die Regel.

Aufgabe 5

$(3 + 4 + 4) + (4 + 6) = 21$ Punkte

(i) Sei $\sigma := \{+, R\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Funktionssymbol + und einem zweistelligen Relationssymbol R. Wir definieren die σ-Struktur $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, R^{\mathcal{N}})$, wobei $+^{\mathcal{N}}$ die übliche Addition auf natürlichen Zahlen darstellt und $R^{\mathcal{N}} = \{(x, y) \mid x \text{ teilt } y \text{ und } x \neq 0\}$.

Geben Sie ohne Begründung Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ an, welche die folgenden Bedingungen erfüllen.

1. Anmerkung: Es gilt $ggT(a, 0) = a$, für alle $a \in \mathbb{N}$.
2. Anmerkung: Sie dürfen φ_i in der Beschreibung von φ_j verwenden nur wenn $i < j$.

NOTE: Ich habe mir in der Klausur leider die Definition nicht richtig angeschaut und die Relation R genau falsch herum verwendet. Das bedeutet, im folgenden, wo jetzt $R(x, y)$, x, y beliebig, steht, stand vorher $R(y, x)$.
Außerdem habe ich eckige Klammern verwendet, der lesbarkeit halber, was mich auch einen halben Punkt gekostet hat.

a) $\varphi_1(\mathcal{N}) = \{1\}$.

$$\varphi_1(x) = \forall y R(x, y)$$

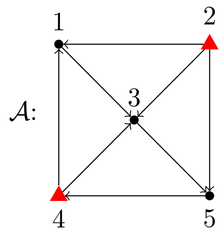
b) $\varphi_2(\mathcal{N})$ ist die Menge aller ungeraden Zahlen.

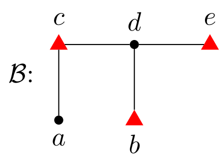
$$\varphi_2(x) = \exists e\big(\varphi_1(e) \wedge \neg R(e + e, x) \wedge (x + e \neq e)\big)$$

c) $\varphi_3(\mathcal{N}) = \{(x,y) \mid ggT(x,y) = 1\}$.

$$\varphi_3(x,y) = \forall z\big((R(z,x) \land R(z,y)) \to \varphi_1(z)\big)$$

(ii) Sei $\sigma := \{E, \Delta\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol und Δ ein einstelliges Relationssymbol ist. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, die im folgenden Bild dargestellt sind. Wir markieren Knoten, die in der Interpretation des Relationssymbols Δ sind, mit einem roten Dreieck.





Geben Sie ohne Begründung die Mengen $\varphi_i(\mathcal{A})$ und $\varphi_i(\mathcal{B})$, für $i \in \{1,2\}$, an.

a) $\varphi_1(x) = \Delta(x) \to \exists y \forall z(E(x,y) \land (\neg\Delta(z) \to E(x,z)))$

$$\varphi_1(\mathcal{A}) = \{1,2,3,5\}$$
$$\varphi_1(\mathcal{B}) = \{a,c,d\}$$

b) $\varphi_2(y) = \exists x \exists z(E(x,y) \land E(y,z) \land (\Delta(x) \leftrightarrow \Delta(z)))$

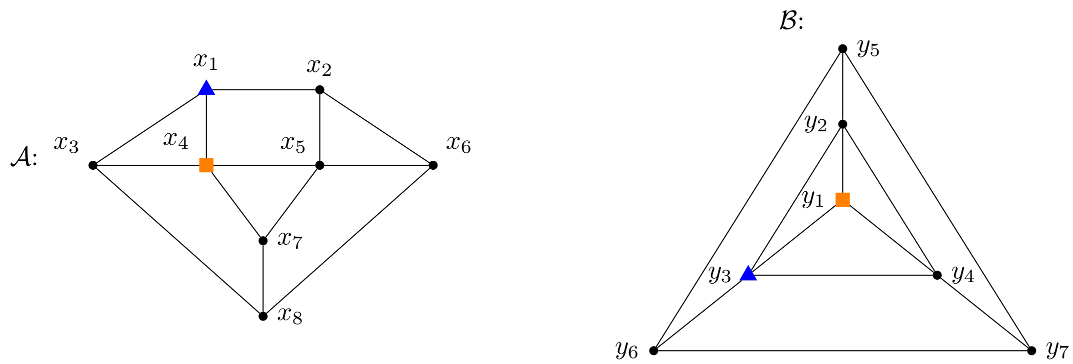
$$\varphi_2(\mathcal{A}) = \{3,4,5\}$$
$$\varphi_2(\mathcal{B}) = \{a,b,c,d,e\}$$

Aufgabe 6

10 + 8 = 18 Punkte

Sei $\sigma := \{E\}$ eine Signatur, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist. Die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, mit Universen A und B, sind als ungerichtete Graphen gegeben.

Anmerkung: Die Farben und Formen der Knoten sind **nicht** Teil der Strukturen und nur zur Orientierung für die Unteraufgabe (i) gedacht.



(i) In $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind die vergangenen Spielzüge in einem laufenden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel markiert. Die beiden orangenen Quadrate x_4 und y_1 sind die gewählten Elemente in der ersten Runde und die beiden blauen Dreiecke x_1 und y_3 wurden in der zweiten Runde gewählt.

Welchen Knoten kann der Herausforderer wählen, um aus diesem Spielstand garantiert in der dritten Runde zu gewinnen? Begründen Sie ihre Antwort.

Der Herausforderer wählt den Knoten $x_5 \in A$. Dieser hat eine Kante zu x_4, aber keine zu x_1. In $\mathcal{B}$ existiert kein Knoten, welcher nur eine Kante zu y_1, aber keine zu y_3 hat, außer y_3. Sowohl y_2, als auch y_4 haben jeweils eine Kante zu y_3, dem Knoten, der in dieser Struktur in der 2. Runde gespielt wurde. Also gewinnt der Herausforderer in der 3. Runde.

(ii) Geben Sie ohne Begründung eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ an, mit $\mathcal{A} \vDash \varphi, \mathcal{B} \nvDash \varphi$ und $qr(\varphi) \leq 3$.

Die beiden Quantoren waren leider falsch herum.

$$\varphi = \forall x \exists y \exists z \big(E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge \neg E(y,z) \big)$$