Probeklausur Lösungen

Aufgabe 1:
Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n)!}$ **2 Punkte**

Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!(-3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-3)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-3)}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow konv.$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$ **2 Punkte**

Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^n}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10}{n}\right) = 0 < 1 \Rightarrow konv.$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+7n+1}$ **2 Punkte**

Minorantenkriterium

$$\frac{2n-1}{3n^2+7n+1} = \frac{2n-1}{4n^2+8n+4-n^2-n-3} = \frac{2n-1}{4(n+1)^2-n^2-n-3} >$$
$$\frac{2n-1}{4(n+1)^2} = \frac{n+1+n-2}{4(n+1)^2} > \frac{n+1}{4(n+1)^2} > \frac{1}{4(n+1)} \Rightarrow div.$$

Aufgabe 2:
Bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ **2 Punkte**

$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$
$\lim_{x\to 1} x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = n$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{(n^2+2n+1)}\right)^n$ **2 Punkte**

$$\left(\frac{n^2}{(n^2+2n+1)}\right)^n = \left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} =$$
$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right)^2$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{1}{e}\right)^2$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**
Bestimme Sie Konstanten α, $\beta \in \mathbb{R}$ derart,daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & , x \le -1 \\ (\alpha+\beta)x & , -1 < x < 1 \\ x^2 + \alpha x - \beta & , x \ge 1 \end{cases}$$

an allen Stellen x $\in \mathbb{R}$ stetig wird.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 + \alpha + \beta$
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\alpha - \beta \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = -1$
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \alpha + \beta$
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 + \alpha - \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -1$

Aufgabe 4: **3 Punkte**
Skizziere den Graphen der folgenden Funktion f, und bestimme ihre Umkehrfunktion. Warum ist umkehrbar?.Warum ist diese stetig?

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 - 4 & , x \ge 3 \\ x - 7 & , x < 3 \end{cases}$$

Die Funktion ist umkehrbar, weil sie streng monotom steigend ist. Die Umkehrfunktion ist stetig, weil die Funktion f stetig ist.f ist stetig,weil Polynomfunktionen stets stetig sind. Es ist nur die Stetigkeit der Funktion f an der Stelle 3 zu untersuchen.
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -4 = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$.
$f_1(x) = (x-3)^2 - 4 \Rightarrow y_1 = (x_1-3)^2 - 4 \Rightarrow (x_1-3)^2 = y_1 + 4 \Rightarrow x_1 = 3 \pm \sqrt{y_1+4}$
$f_1 : [3,+\infty[\to [-4,+\infty[\Rightarrow f_1{}^{-1} : [-4,+\infty[\to [3,+\infty[\Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{y_1+4}$.
$f_2(x) = x - 7 \Rightarrow y_2 = x_2 - 7 \Rightarrow x_2 = y_2 + 7$
$f_2 : [-\infty, 3[\to [-\infty, -4[\Rightarrow f_2{}^{-1} : [-\infty, -4[\to [-\infty, 3[$

Aufgabe 5: **2 Punkte**
Stelle die folgende komplexen Zahlen in der Form $re^{i\varphi}$ dar:

a) $z_1 = \left(-1 + \sqrt{3}\, i\right)^4$,

$c_1 = (-1 + \sqrt{3}\, i), r = \sqrt{1+3} = 2, \varphi = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow c_1 = 2e^{\frac{2}{3}\pi\, i} \Rightarrow z_1 = 16e^{\frac{8}{3}\pi\, i}$

b) $z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8 \quad c_2 = (\frac{1+i}{1-i}) = \frac{(1+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} \Rightarrow c_2 = i \Rightarrow z_2 = i^8 = 1 = e^{0i}$

Aufgabe 6: **2 Punkte**

Berechne alle Lösungen von $z^3 = 4\sqrt{2}(i-1)$.
Stelle die Lösungen in algebraischer Form dar.

$r = 4\sqrt{2}\sqrt{1+1} = 8 \Rightarrow r = 2, tan(\varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$

$z^3 = 8e^{\frac{(3+2k)\pi}{4}}$

$z = 2e^{\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}}$

$k = 0, z = 2e^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z = 2(cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4})) \Rightarrow 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \Rightarrow z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$